

Zvyšky po delení

Jozef Rajník

Ak uvažujeme deliteľnosť číslom d , tak každé celé číslo a vieme zapísať v tvare

$$a = k \cdot d + z,$$

kde k a z sú celé čísla. Navyše, ak číslo $z \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ (resp. z je z inej vhodne zvolenej množiny), tak čísla k a z sú určené jednoznačne. Vtedy hovoríme, že k je *celočíselný podiel čísel a a d* a z je *zvyšok čísla a po delení číslom d* . Matematicky zapísané:

$$k = \lfloor a/d \rfloor, \quad z = a \bmod d.$$

Pravidlá pre prácu so zvyškami: Ak $a \bmod d = x$ a $b \bmod d = y$, tak

- $(a + b) \bmod d = (x + y) \bmod d$,
- $(a - b) \bmod d = (x - y) \bmod d$,
- $(a \cdot b) \bmod d = (x \cdot y) \bmod d$.

Iný zápis, častejšie používaný v matematike pre prácu so zvyškami, je pomocou kongruencie. Hovoríme, že a je *kongruentné s b modulo d* , ak $d \mid a - b$, teda ak a a b dávajú rovnaký zvyšok po delení d . Označujeme

$$a \equiv b \pmod{d}.$$

1. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí

- a) $2 \mid n^2 - n$,
- b) $6 \mid n^3 - n$,
- c) $3 \mid n^3 + 2n$,
- d) $30 \mid n^5 - n$,
- e) $60 \mid n^6 - n^2$.

2. Určte všetky kladné celé čísla m , pre ktoré je rozdiel $m^6 - m^2$ deliteľný číslom 120. [MO55-C-I-1]

3. Dokážte, že pre každé nepárne prirodzené číslo n je súčet $n^4 + 2n^2 + 2013$ deliteľný číslom 96. [MO63-C-I-5]

4. Dokážte, že pre všetky celé čísla x, y platí

$$50 \mid 19x + 3y \Leftrightarrow 50 \mid 23x + y.$$

5. Nájdite všetky celé čísla a, b také, že pre všetky celé čísla x, y platí

$$50 \mid 19x + 3y \Leftrightarrow 50 \mid ax + by.$$

Ďalšie materiály a úlohy: <http://mks.mff.cuni.cz/library/DelitelnostKK/DelitelnostKK.pdf>