

Sumy s dolnými celými časťami

Jozef Rajník, 6. 10. 2017

Dolná celá časť reálneho čísla x je najväčšie celé číslo $\lfloor x \rfloor$, ktoré nie je väčšie ako x . Podobne, *horná celá časť* čísla x je najmenšie celé číslo $\lceil x \rceil$, ktoré nie je menšie ako x . Tiež vie prísť vhod *desatinná časť* čísla x : $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Zopár užitočných vlastností (pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$):

1. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$.
2. $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ (rovnako aj pre hornú celú časť).
3. Pre $x \leq y$ platí $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$ (neklesajúcosť).

Úloha 1 (MO38-B-II-4). Určte, koľko celočíselných riešení má rovnica

$$\lfloor \sqrt[1989]{n} \rfloor + \left\lfloor \sqrt[1989]{\frac{n+1}{2}} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \sqrt[1989]{\frac{n+1988}{1989}} \right\rfloor = 1990.$$

Úloha 2 (AIME 1991). Pre reálne číslo r platí

$$\left\lfloor r + \frac{19}{100} \right\rfloor + \left\lfloor r + \frac{20}{100} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor r + \frac{91}{100} \right\rfloor = 546.$$

Zistite $\lfloor 100r \rfloor$.

Úloha 3 (KMS 2016/17-3L-7). V Krajine osí ôs namiesto zvierat chovajú čísla. Farmárka Felícia chová reálne čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$, kde $n \geq 2$ je dané prirodzené číslo. Ich dolné celé časti $\lfloor x_1 \rfloor, \lfloor x_2 \rfloor, \dots, \lfloor x_n \rfloor$ majú v nejakom poradí hodnoty $1, 2, \dots, n$ (každú práve raz). Nájdite maximálnu a minimálnu hodnotu výrazu

$$\lfloor x_2 - x_1 \rfloor + \lfloor x_3 - x_2 \rfloor + \lfloor x_4 - x_3 \rfloor + \cdots + \lfloor x_n - x_{n-1} \rfloor.$$

Úloha 4 (Doplňujúca úloha k 67MO-A-I-4). Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 2$ platí

$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor + \cdots + \lfloor \sqrt[n]{n} \rfloor = \lfloor \log_2 n \rfloor + \lfloor \log_3 n \rfloor + \cdots + \lfloor \log_n n \rfloor.$$

Úloha 5 (KMS 2015/16-1L-7). Nech p, q sú nesúdeliteľné prirodzené čísla. Dokážte, že

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2q}{p} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(p-1)q}{p} \right\rfloor.$$

Úloha 6 (IMO 1968, úloha 6). Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+8}{16} \right\rfloor + \cdots = n.$$