

Deliteľnosť

Jozef Rajník

Vlastnosti deliteľnosti

O celých číslach a , d hovoríme, že *číslo a je deliteľné číslom d* , resp. *číslo d delí číslo a* , ak existuje také celé číslo k , pre ktoré platí

$$a = k \cdot d.$$

Túto vlastnosť vieme zapísať ako $d \mid a$.

$$5 \mid 20, -12 \mid 60, -18 \mid -18.$$

Prejdeme si niekoľko základných tvrdení, ktoré okolo deliteľnosti platia. Pre ľubovoľné celé čísla a , b , c , d platí:

1. $a \mid a$.
2. $a \mid 0$.
3. $1 \mid a$.
4. $0 \mid a$ práve vtedy, keď $a = 0$.
5. Ak $d \mid a$ a $d \mid b$, tak aj $d \mid (a + b)$.
6. Ak $d \mid a$ a $d \mid b$, tak aj $d \mid (a - b)$.
7. Ak $d \mid a$, tak aj $d \mid ca$.
8. Ak $a \mid b$ a $c \mid d$, tak aj $ac \mid bd$.
9. Ak $a \mid b$ a $b \mid c$, tak aj $a \mid c$.
10. Ak $ac \mid bc$ a $c \neq 0$, tak $a \mid b$.
11. Ak $d \mid a \pm b$ a $d \mid a$, tak $d \mid b$.

Dôležitý odhad, ktorý nám môže pomôcť získať lepšie vzťahy o číslach a , b : Ak $b \neq 0$ a $a \mid b$, tak $|a| \leq |b|$. Dokonca, ak neplatí $a = b$, tak $2|a| \leq |b|$.

Pri deliteľnosti sú dôležité prvočísla. *Prvočíslo* je také prirodzené číslo, ktoré má práve dvoch kladných deliteľov: 1 a samého seba. Jedno z ich významných použití je, že každé prirodzené číslo sa dá jednoznačne (až na poradie) napísať ako súčin prvočísel. Napr $220 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$. Pomocou rozkladu na prvočísla sa dajú mnohé veci dokázať alebo si lepšie predstaviť. Ak máme dané všeobecne nejaké číslo a , zvykneme je rozklad na prvočísla zapisovať ako

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n},$$

kde $p_1, p_2, \dots, p_n$ sú prvočísla (vhodne zvolené) a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sú nezáporné celé čísla.

Najväčší spoločný deliteľ čísel a, b je najväčšie také celé číslo d , že $d \mid a$ aj $d \mid b$. Označujeme ho (a, b) . Ak $(a, b) = 1$, hovoríme, že čísla a a b sú *nesúdeliteľné*. Najmenší spoločný násobok čísel a, b je najmenšie také prirodzené číslo n , že $a \mid n$ a $b \mid n$. Označujeme ho $\text{nsn}(a, b)$ alebo $[a, b]$. Medzi najväčším spoločným deliteľom a najmenším spoločným násobkom platí vzťah

$$(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b.$$

Teraz môžeme ukázať niekoľko dôležitých vlastností prvočísel a nesúdeliteľných čísel.

- Ak p je prvočíslo a $p \mid ab$, tak $p \mid a$ alebo $p \mid b$.
- Ak $(d, a) = 1$ a $d \mid ab$, tak $d \mid b$.

Úlohy

Úloha 1. Nájdite všetky kladné celé čísla n , pre ktoré $n - 3 \mid n^3 - 3$.

Úloha 2 (KMS 14/15-L1-3). Nájdite všetky prvočísla p a q také, že $p \mid q^2 - 4$ a tiež $q \mid p^2 - 1$.

Úloha 3 (MO60-B-II-2). Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b , pre ktoré platí

$$a \mid b \quad \text{a zároveň} \quad b + 1 \mid 3a + 4.$$

Úloha 4 (MO60-C-S-3). Nech x, y sú také kladné celé čísla, že obe čísla $3x + 5y$ a $5x + 2y$ sú deliteľné číslom 60. Zdôvodnite, prečo číslo 60 delí aj súčet $2x + 3y$.

Úloha 5 (MO60-C-I-2). Dokážte, že výrazy $23x + y$ a $19x + 3$ sú deliteľné číslom 50 pre rovnaké dvojice prirodzených čísel x a y .

Úloha 6 (IMO 1959, úloha 1). Dokážte, že pre každé celé číslo n , je zlomok

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

v základnom tvare.

Úloha 7. O celých číslach a, b vieme, že sú nesúdeliteľné. Rozhodnite, či potom musia byť nesúdeliteľné aj nasledujúce dvojice čísel

- $a + b, ab$
- $a^2 + b^2, ab$
- $a + b, a - b$
- $a^3, (a + 1)^5$

Úloha 8. Nech p a q sú prvočísla. Zistite, aké hodnoty môže nadobúdať najväčší spoločný deliteľ čísel $p + q$ a $p^2 + q^2$.

Úloha 9 (KMS 16/17-Z1-4). Je dané prvočíslo p . Nájdite všetky štvorice kladných celých čísel a, b, c, d , pre ktoré platí

$$\begin{aligned}ac - bd &= p, \\ad - bc &= 0.\end{aligned}$$

Úloha 10 (KMS 16/17-2Z-5). Nájdite všetky prvočísla p, q, r také, že platí

$$2^{p+1} + q^2 = r^2.$$

Úloha 11 (KMS 14/15-Z2-4). Vodkovi sa zunovalo hrať sa s hračkami, a tak sa začal hrať s číslami. Rozhodol sa nájsť všetky také dvojice kladných celých čísel (a, b) , že číslo $a^b + b$ delí číslo $a^{2b} + 2b$. Vedeli by ste ich nájsť aj vy?

Úloha 12 (KMS 15/16-Z3-8). Jefe už našiel svoje stratené okuliare. Teraz však stratil prirodzené čísla a, b, c . Pamätá si, že každé bolo väčšie ako 1 a že pre ne platilo:

$$a \mid bc + 1, \quad b \mid ac + 1, \quad c \mid ab + 1.$$

Pomôžte mu a nájdite všetky trojice prirodzených čísel (a, b, c) väčších ako 1, ktoré spĺňajú uvedené podmienky.

Úloha 13 (MO55-A-III-5). Nájdite všetky trojice navzájom rôznych prvočísel p, q, r spĺňajúce nasledovné podmienky:

$$p \mid q + r, \quad q \mid r + 2p, \quad r \mid p + 3q.$$

Úloha 14 (MO65-A-III-1). Nech $p > 3$ je dané prvočíslo. Určte počet všetkých usporiadaných šestic (a, b, c, d, e, f) kladných celých čísel, ktorých súčet je rovný $3p$, a pritom všetky zlomky

$$\frac{a+b}{c+d}, \quad \frac{b+c}{d+e}, \quad \frac{c+d}{e+f}, \quad \frac{d+e}{f+a}, \quad \frac{e+f}{a+b}$$

majú celočíselné hodnoty

Náznaky riešení

Hint 2. p ľubovoľné nepárne prvočíslo, $q = 2$ alebo $p = 5, q = 3$.

- Rozložte si pravé strany deliteľnosti na súčin $(a^2 - b^2)$. Keď prvočíslo delí súčin, musí deliť jeden z činiteľov.
- Rozoberte jednotlivé prípady, ktoré môžu nastať. Využite pritom, že ak $a \mid b$, tak $a \leq b$, kde a, b sú prirodzené čísla.

Hint 3. Zapište si $b = k \cdot a$, skúmajte, aké môže byť k . Môže vám pri tom prísť vhod odhad $a \mid b \Rightarrow a \leq b$.

Hint 4. Zapište si výrazy ako $60k$ a $60l$ a vyjadrite x, y ako zo sústavy dvoch rovníc.

Hint 5. Riešenie 1: Zapište si jeden výraz cez $50k$, vyjadrite si y a dosadte do druhého výrazu. Riešenie 2: Hrajte sa s jednou deliteľnosťou a odvodzujte z nej ďalšie, aby ste sa dopracovali k druhej deliteľnosti.

Hint 6. Nech $d \mid 21n + 4$ a $d \mid 14n + 3$. Kombinujte tieto a ďalšie tvrdenia, ktoré dostane o d , kým sa nedopracujete k $d \mid 1$.

Hint 8. Uvažujte prvočíslo r , pre ktoré $r \mid p + q$ a $r \mid p^2 + q^2$. Odvodzujte, ďalšie deliteľnosti, čo musia platiť. Skúšajte ich aj vhodne prenasobovať, aby ste sa zbavili p^2 .

Výsledok: 2p v prípade, že $p = q$, 2 v prípade, ak sú obe nepárne; 1 v prípade, že jedno je párne a druhé nepárne.

Hint 9. Sčítajte a odčítajte rovnice, rozložte ľavé strany oboch rovníc, ktoré dostanete, na súčin.

Riešene: $a = c = (p + 1)/2, b = d = (p - 1)/2$

Hint 11. Upravte vzťah deliteľnosti na jednoduchší. Deliteľnosť ide upraviť na tvar $a^b + b \mid b^2 + 2b$, ten môže platiť len pre „malé“ hodnoty a, b . Postupne dosádzajte b , príp. a .

Riešenie: $a = 2, b = 1$