

# Kocúrkovské platidlá

Jožef Rajník, Letná škola matematiky 31. 7. – 4. 8. 2017

V Kocúrkove majú mince dvoch hodnôt. Aby si občania nezvykali, tak každý deň sa tieto hodnoty zmenia.

**Úloha 1.** Nájdite všetky hodnoty, ktoré možno v Kocúrkove zaplatiť (aj s vydávaním), pokiaľ platidlá majú hodnotu

1. 8 a 12,
2. 5 a 13,
3. 42 a 47,
4. 45 a 75.

Ak prehlásite nejakú množinu hodnôt za výsledok, zamyslite sa, čo potrebujete ukázať na to, že máte pravdu.

Asi už tušíte, aký je pravidlo pre množinu hodnôt, ktoré sa dajú v daný deň zaplatiť. Ak sa momentálne používajú platidlá s hodnotami  $a$ ,  $b$ , vieme zaplatiť práve všetky násobky najväčšieho spoločného deliteľa čísel  $a$ ,  $b$  (budeme ho ďalej označovať ako  $(a, b)$ ). Čo potrebujeme ukázať, aby sme dokázali naše tvrdenie? Dve veci:

1. Sumy, ktoré nie sú násobkom  $(a, b)$ , nevieme zaplatiť. To je celkom jednoduché. Obe hodnoty platidiel sú násobky  $(a, b)$ . Každá suma, ktorú zaplatíme je súčet (resp. rozdiel) niekoľkých násobkov  $(a, b)$ , teda tie je násobkom  $(a, b)$ .
2. Všetky násobky  $(a, b)$  naozaj vieme zaplatiť. Na to nám stačí nájsť spôsob, ako zaplatiť sumu  $(a, b)$ . V predošlej úlohe sa nám asi podarilo zaplatiť sumu 4 ako  $12 - 8$  alebo  $1 = 2 \cdot 13 - 5 \cdot 5$ . Pri ďalších sadách to je trochu komplikovanejšie, ale ide to. Ako ale šikovne nájsť vhodný spôsob platenia?

**Úloha 2.** Skúsme úlohy s jednou premennou – prirodzeným číslom  $n$ . Nájdite všetky sumy, čo možno zaplatiť, ak hodnoty platidiel sú

1.  $n$  a  $n + 2$ ,
2.  $n$  a  $n + 47$ ,
3.  $21n + 4$  a  $14n + 3$ ,
4.  $n^2 + 1$  a  $n + 1$  (náročnejšia).

Na základe našej hypotézy veríme, že odpoveď je najväčší spoločný deliteľ dvoch hodnôt platidiel. Zamerajte sa teda na jeho hľadanie.

**Úloha 3.** Dokážte, že pre celé čísla  $a$ ,  $b$  také, že  $a \geq b$ , platí

$$(a, b) = (b, a - b).$$