

Rovnice s celými čísly

Jozef Rajník, 10. 4. 2021

Čo sa oplatí robiť pri takýchto rovniciach?

- všimnúť si nejakej deliteľnosti;
- sledovať zvyšky po delení, paritu;
- pri prvočíslach ošetriť zvlášť dvojku (jediné párne prvočíslo);
- upraviť rovnicu na súčin;
- využívať odhady a nerovnosti, zvlášť tie z deliteľností.

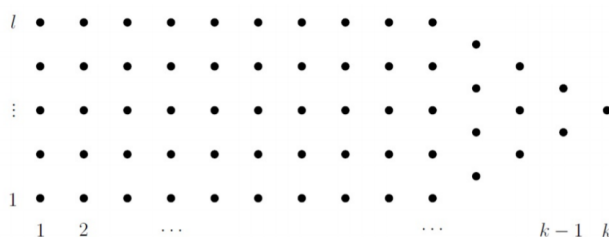
Úloha 1 (KMS 2011-Z3-2). Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x, y , pre ktoré platí

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2011}.$$

Úloha 2 (KMS 2016-Z3-3). Nájdite všetky trojice celých čísel (a, b, c) , pre ktoré platí

$$\begin{aligned}a + bc &= 3c, \\ b + ca &= 3a, \\ c + ab &= 3b.\end{aligned}$$

Úloha 3 (KMS 2014-Z1-5). *Ceruzkový obrázok* čísel k a l je takýto obrázok.



Označme $CO(k, l)$ počet bodiek v ceruzkovom obrázku čísel k a l , napríklad $CO(14, 5) = 60$. Nech n je prirodzené číslo, potom ceruzkový pár čísla n je taký pár prirodzených čísel k, l , kde $k > l > 1$, že $n = CO(k, l)$.

a) Koľko ceruzkových párov existuje pre čísla 2, 8 a 15?

b) Koľko ceruzkových párov existuje pre číslo 2014?

Úloha 4 (KMS 2014-Z3-5). Prirodzene krásny Hopko si hľadá prirodzene krásne dievča. Pomôžte mu! Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b takých, že platí $(a^3 + b)(a + b^3) = (a + b)^4$.

Úloha 5 (KMS 2016-Z2-5). V jednom mestečku hľadajú zločincov, v inom zlato, v Algebrove však hľadajú čísla. Nájdite všetky prvočísla p, q, r také, že platí

$$2^{p+1} + q^2 = r^2.$$

Úloha 6 (KMS 2016-Z3-6). Pre každé nezáporné celé číslo k nájdite všetky nezáporné celé čísla x, y, z také, že

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8^k.$$

Úloha 7 (KMS 2010-Z3-8). Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x a y , pre ktoré platí

$$x^2 = 4y + 3[x, y],$$

kde $[x, y]$ značí najmenší spoločný násobok čísel x a y .

Úloha 8 (KMS 2015-Z1-8). Jefe stratil okuliare. Keď ich hľadal, namiesto nich našiel prirodzené čísla a, b, c také, že:

- $a^2 + 1$ a $b^2 + 1$ sú prvočísla,
- $(a^2 + 1)(b^2 + 1) = c^2 + 1$.

Nájdite všetky trojice prirodzených čísel a, b, c spĺňajúce uvedené vlastnosti.

Úloha 9 (KMS 2012-L3-8). Nájdite všetky celé čísla m a prirodzené čísla a, b také, že platí

$$(a + b^2)(b + a^2) = 2^m.$$

Úloha 10 (KMS 2009-Z3-8). Nájdite všetky trojice nezáporných celých čísel a, b, c , pre ktoré platí

$$2^a + 3^b = 4^c.$$

Úloha 11 (KMS 2009-L3-8). Dokážte, že existuje nekonečne veľa trojíc celých čísel a, b, c , ktoré sú riešením rovnice

$$a^2 + b^2 = c^2 + 3.$$

Úloha 12 (KMS 2013-L3-10). Princ Kleofáš sa vydal hľadať princeznú. Dvorania podľa vzoru princa začali hľadať tiež. Pomôžte im. Nájdite všetky usporiadané trojice (x, y, z) racionálnych čísel, ktoré splňujú rovnicu

$$x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z = 1$$

Úloha 13 (KMS 2016-Z2-10). Nájdite všetky dvojice celých čísel (p, m) , kde p je prvočíslo, také, že platí

$$p^3 + m(p + 2) + 4^p = m^2 + p + 1.$$

Náznaky riešení

1 Upravte na $(x - 2011)(y - 2011) = 2011^2$.
 $\{x, y\} = \{2012, 2011^2 + 2011\}$ alebo $x = y = 4022$.

2 Pozrite sa na jednu rovnicu a skúste si v nej všimnúť nejakú deliteľnosť.
Platí $a \mid b \mid c \mid a$, teda z nerovností máme $|a| = |b| = |c|$. Vďaka cyklickosti stačí vyriešiť pre prípady $(a, a, a), (a, a, -a)$.
 $K = \{(0, 0, 0), (2, 2, 2)\}$.

4 Upravujte, upravujte,, kým nedostanete pekný súčin, kde na jednej strane bude len celé číslo.
Kľúčovou úpravou je upraviť obe strany na štvorec a odmocniť. $(a - 2)(b - 2) = 3$, teda $\{a, b\} = \{3, 5\}$.

5 Rozložte na súčin $2^{p+1} = (r - q)(r + q)$ a skúmajte ako sa mocnina dvojky rozloží na dva činitele. Z toho za pomoci parity r určte, že $r - q = 2$. Dosadte a opäť rozložte na súčin.
(3, 3, 5)

6 Ak je pravá strana deliteľná štyrmi, tak musí byť aj ľavá. Čo viete povedať o x, y, z ? Vyroberte si potom z nich menšie. Permutácie $(2^{3k/2}, 0, 0)$ pre párne k ; permutácie $(2^{(3k-1)/2}, 2^{(3k-1)/2}, 0) + CZ$ pre nepárne k

8 Vyriešte pre prípad, že jedno z a, b je nepárne. Potom uvažujte obe párne. Využite, že $b^2 + 1$ je prvočíslo. Pokúste sa upraviť rovnicu do tvaru, kde budete mať na oboch stranách súčin, pričom na jednej strane v súčine dostanete $b^2 + 1$. Vhodný súčinový tvar je $(b^2 + 1)a^2 = (c + b)(c - b)$. Potom ak $b^2 + 1 \mid c + b$, tak $c - b \mid a^2$. Rozoberte aj druhý prípad. Uvažujte o nerovnostiach.

9 Jednotlivé činitele sú mocniny dvojky. Odčítajte ich a rozložte na súčin. Ak $a + b^2 = 2^{r+s}$ a $b + a^2 = 2^r$ ($r \leq p$), tak $(a + b - 1)(a - b) = 2^r(2^s - 1)$. Zistite, ktorá zátvorka musí byť párna. Pre $s \neq 0$ nájdite s využitím nerovností spor.