

Diskrétny kalkulus

Jozef Rajník, Letná škola Trojstenu, 15. – 26. 7. 2024

Prehľad použitých postupností

Na začiatok si predstavíme zopár postupností, s ktorými budeme pracovať.

Definícia 1. Pre nezáporné celé (resp. aj reálne) číslo n a nezáporné celé číslo k definujeme k -tu klesajúcu faktoriálnu mocninu čísla n ako

$$n^{\underline{k}} = \underbrace{n(n-1) \dots (n-k+1)}_{k \text{ zátvoriek}}.$$

Poznámka. Pre záporný exponent definujeme klesajúcu mocninu ako

$$n^{-k} = \frac{1}{(n+1)(n+2) \dots (n+k)}.$$

Definícia 2. Kombinačné číslo označuje počet spôsobov, ako z n prvkov vybrať k , ak nám nezáleží na poradí:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k(k-1) \dots 1},$$

kde n a k sú nezáporné celé čísla. Všimnite si, že kombinačné číslo tu je definované aj pre prípad, keď $k > n$ – v takom prípade je jeho hodnota definovaná ako 0. Ak je k alebo n záporné celé číslo, definujeme jeho hodnotu ako 0.

Definícia 3. Postupnosť *Fibonacciho čísel* je definovaná nasledovne: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pre každé nezáporné celé číslo n

Definícia 4. Postupnosť *harmonických čísel* je

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Diferencia postupností

Definícia 5. Diferenciou postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazývame postupnosť $\{\Delta a_n\}_{n=0}^{\infty}$ definovanú predpisom

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n.$$

Veta 6. Diferencie niektorých známych postupností:

Postupnosť	Diferencia	Poznámky
$n^{\underline{k}}$	$kn^{\underline{k-1}}$	$k \in \mathbb{Z}$
2^n	2^n	
a^n	$(a-1)a^n$	$a \in \mathbb{Z}^+$
F_n	F_{n-1}	
H_n	$\frac{1}{n+1}$	
$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k-1}$	$k \in \mathbb{N}$
$n!$	$n \cdot n!$	

Veta 7. Pre počítanie diferencií platia nasledujúce pravidlá:

- a) $\Delta(f_n + g_n) = \Delta f_n + \Delta g_n$,
 b) $\Delta(f_n - g_n) = \Delta f_n - \Delta g_n$,
 c) $\Delta(cf_n) = c\Delta f_n$,
 d) $\Delta(f_n g_n) = f_n \Delta g_n + g_{n+1} \Delta f_n$.

Úloha 1. Určte diferencie nasledovných postupností:

- a) $a_n = n$, d) $a_n = n^3$, g) $a_n = n^4 \cdot F_n$,
 b) $a_n = n^2$, e) $a_n = 3^n + 4n^3$, h) $a_n = 3 \cdot !H_n \cdot F_n$,
 c) $a_n = 3^n$, f) $a_n = n3^n$, i) $a_n = 4^n \cdot n^6 \cdot F_n$,

Sumy

Definícia 8. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ označíme $\{\sum a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ľubovoľnú postupnosť s , ktorá spĺňa $\Delta s_n = a_n$.

Veta 9. Nech $\{\sum s_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{\sum t_n\}_{n=0}^{\infty}$ sú dve také postupnosti, že $\Delta s_n = \Delta t_n = a$. Potom existuje konštanta c taká, že $s_n - t_n = c$. Teda všetky postupnosti $\sum a$ sa líšia len o konstantu.

Definícia 10. Zápisom $\sum_k^l a_n$ označujeme číslo $s_l - s_k$, kde s je ľubovoľná postupnosť, pre ktorú platí $\Delta s_n = a_n$. (Podľa predošlej vety ide o jednoznačne určené číslo.)

Veta 11. Platí

$$\sum_k^l a = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{l-1}.$$

Veta 12. Sumy niektorých známych postupností:

Postupnosť	Suma	Poznámky
n^k	$\frac{n^{k+1}}{k+1} + c$	$k \in \mathbb{Z} - \{1\}$
2^n	$2^n + c$	
a^n	$\frac{a^n}{a-1} + c$	$a \in \mathbb{Z}^+$
F_n	$F_{n+1} + c$	
$\frac{1}{n} = n^{-1}$	$H_{n-1} + c$	
$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k+1} + c$	$k \in \mathbb{N}$

Veta 13. Pre počítanie súm platí

- $\sum(f_n \pm g_n) = \sum f_n \pm \sum g_n$,
- $\sum(cf_n) = c \sum f_n$.

Úloha 2. Vypočítajte

- | | | |
|---------------------------------|--|------------------------|
| a) $\sum_{k=0}^n k,$ | e) $\sum_{k=1}^n (k-1)k,$ | i) $\sum_{k=0}^n k^2.$ |
| b) $\sum_{k=0}^n a^k,$ | f) $\sum_{k=1}^n k(k-1)(k-2),$ | j) $\sum_{k=0}^n k^3,$ |
| c) $\sum_{k=0}^n F_k,$ | g) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)},$ | k) $\sum_{k=0}^n k^4,$ |
| d) $\sum_{k=0}^n \binom{k}{m},$ | h) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)},$ | |

Veta 14 (Sumácia per partes). Platí

$$\sum (f_n \Delta g_n) = f_n g_n - \sum (g_{n+1} \Delta f_n).$$

Úloha 3. Vypočítajte

- | | | | |
|--------------------------|-----------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a) $\sum_{k=0}^n k 2^k,$ | c) $\sum_{k=0}^n k \binom{k}{m},$ | e) $\sum_{k=0}^n k H_k,$ | g) $\sum_{k=0}^n k^2 2^k,$ |
| b) $\sum_{k=0}^n k F_k,$ | d) $\sum_{k=0}^n H_k,$ | f) $\sum_{k=0}^n k^2 H_k,$ | |