

Zbrane vs. chmáry a. k. a. Limity

Jozef Rajník, KMS online prednáška, 31. 1. 2021

- Zbraň je charakterizovaná funkciou $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, ktorá nám hovorí, že ak je zbraň na leveli n , tak má silu $f(n)$.
- Chmára má tiež svoju silu – reálne číslo. Budeme ho označovať veľkými písmenami, spravidla S .
- Okrem toho má chmára tolerančný filter – kladné reálne číslo f . Označujeme ho gréckymi písmenami, spravidla α .
- Chmára zomrie na útok, pokiaľ sa sila útoku líši od sily chmáry o menej ako f , teda menej ako o silu tolerančného filtra.

Boj medzi chmárou so silou S a nami so zbraňou f prebieha nasledovne:

1. Chmára si nastaví tolerančný filter $\alpha \in \mathbb{R}^+$ (vidí našu zbraň).
2. Potom zbraň nastavíme na level n podľa našej voľby.
3. Ak sa sila zbrane líši od sily chmáry menej ako o f , tak sme vyhrali, inak vyhrala chmára. Teda vyhráme práve vtedy keď

$$|f(n) - S| < \alpha.$$

Príklad 1. So zbraňou $a(n) = n^2$ bojujeme proti chmáre so silou 17. Chmára si nastavila filter 5. Ak máme zbraň na leveli 6, zbraň má silu $6^2 = 36$, a teda chmáru neporazíme.

1. Na aké levely môžeme nastaviť zbraň, aby sme chmáru porazili?
2. Môže si chmára zvoliť filter tak, aby sme ju nevedeli poraziť?

V našom arzenáli máme nasledovné zbrane

- | | | |
|------------------------------|--|---|
| • $a(n) = n^2$, | • $e(n) = \frac{1}{n^2}$, | • $h(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, |
| • $b(n) = n$, | • $f(n) = \frac{n^2}{2n^2 - 3}$, | • $i(n) = \log n$, |
| • $c(n) = \frac{1}{n}$, | • $g(n) = \frac{\sqrt{n} + 47}{5n + 17}$, | • $j(n) = 3 + (-2)^{-n}$, |
| • $d(n) = \frac{n}{n + 1}$, | | • $k(n) = (-1)^n$, |

Úloha 1. Pre každú zo zbraní určte, proti ktorým chmáram máme s nimi víťaznú stratégiu.

1. Vieme poraziť so zbraňou f chmáry pre každé prirodzené číslo n chmáru so silou $f(n)$?
2. Vieme poraziť aj chmáry s inými silami?
3. Koľko takých chmár z predošlej úlohy môže byť? Môže ich byť viac ako jedna?

Boj sa nám teraz skomplikoval. Level zbrane v skutočnosti nie je nastaviteľný podľa našej ľubovôle. Máme power-upy, ktorými vieme zvýšiť o 1 level zbrane, avšak tento level už nevieme znížiť. Navyše, k týmto power-upom sa dostali aj chmáry.

Pravidlá boja chmáry sily S proti nám so zbraňou f (na začiatku má level 1) sa nám teda zmenili na nasledovné.

1. Chmára si nastaví toleračný filter $\alpha \in \mathbb{R}^+$ (vidí našu zbraň).
2. Potom zbraň power-upneme na level n podľa našej voľby.
3. Potom chmára ľubovoľne veľa krát (aj 0) power-upne našu zbraň.
4. Ak sa sila zbrane líši od sily chmáry menej ako o f , tak sme vyhrali, inak vyhrala chmára. Teda vyhráme práve vtedy keď

$$|f(n) - S| < \alpha.$$

Teraz zbraň $a(n) = n^2$ nevie poraziť chmáru so silou 16. Chmára si nastaví filter 1. Nech nastavíme level zbrane a akokoľvek, tak chmára nám podhodí 4 power-upy, čím posunie level našej zbrane na aspoň 5, teda jej sila bude aspoň 25, čo je rozhodne veľa.

Úloha 2. Ktoré chmáry vedia jednotlivé zbrane poraziť teraz?

Úloha 3. Ak máme nejakú zbraň, koľko rôznych chmár s ňou vieme poraziť?

Spojme zbrane!

Úloha 4. Máme zbraň f , ktorá vie poraziť chmáru x a zbraň g porážajúcu chmáru y . Akú chmáru poráža zbraň

- cf , kde c je reálna konštanta,
- $f + g$,
- $f - g$,
- $f \cdot g$,
- f/g ,

Úloha 5. Máme zbraň f , ktorá poráža chmáru sily 0. Potom máme zbraň g takú, že funkcia g je ohraničená zdola aj zhora (teda existuje také kladné reálne číslo K , že $|g(n)| < K$ pre všetky prirodzené čísla n), nevieme o nej však, či vôbec nejakú chmáru poráža. Platí, že zbraň $f \cdot g$ musí vždy porážať chmáru 0?

Úloha 6. Určte, ktoré chmáry porážajú nasledovné zbrane

- $\frac{4n^3 + 3n^2 - 17}{2n^4 - 15n^2 - 47n + 5}$
- $\frac{5n^6 - 3n^3 - n}{3n^2 + 3n + 1}$
- $\frac{5 - 2^x}{5 \cdot 2^x + 1}$
- $\frac{3n}{n+5} \sin(n^2 - 45 + 47^n)$
- $\frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$