Dôkazy

Jozef Rajník

Toto je nejaký predbežný môj text k dôkazom, v ktorom chcem pomerne podrobne vysvetliť, ako dokazovanie funguje.

Čo to je vlastne dôkaz? Začneme najprv jedným príbehom. Predstavme si, že sme v škole a so spolužiakmi si v rámci precvičovania riešime túto úlohu.

Úloha 1. V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu

$$2x - 6 + 4 + x = 2x + 3.$$

Verím, že s takouto úlohou by ste nemali problém. Možno ste ju už vyriešili skôr ako ste začali čítať tento text. No príde náš spolužiak Seki, ktorý doteraz študoval v úplne inej krajine a predvedie nám nasledovné riešenie.

Pokus o riešenie

1 Pozrime sa na čísla, ktoré máme pri x-kách. Prvé x má pri sebe dvojku, druhé x nemá žiadne číslo – to zodpovedá jednotke, a posledné číslo má opäť dvojku. Sčítame $2 + 1 + 2 = 5$, čiže riešenie tejto rovnice je $x = 5$. Presvedčíme sa o tom skúškou správnosti. Ľavá strana vyjde $2 \cdot 5 - 6 + 4 + 5 = 12$ a pravá strana vyjde $2 \cdot 5 + 3 = 13$, takže skúška nám vyšla.

Čo vravíte na toto riešenie? Je správne? Úplne alebo s výhradami? Alebo je dosť mimo? Ak tvrdíte, že nie je správne, tak prečo? Asi celkom častá odpoveď, čo by sme počuli v tejto situácii je: „To nie je správne riešenie, lebo rovnice sa majú riešiť takto, lebo takto sme to robili v škole“ Nejde náhodou o matematického génia s inovatívnym spôsobom myslenia?

Táto situácia je v matematike celkom častá a je pre všetkých zúčastnených náročná. Pri takýchto bežných typoch úloh (ako napr. rovnice) aspoň máme výhodu, že málokedy stojíme na strane vymýšľača riešení, lebo sme sa v škole učili postupy, ako sa takéto úlohy majú riešiť. No ak sa matematike venujeme viac, tak stretneme aj úlohy, ktoré nezapadajú do nejakého bežného typu. V takej situácii musíme vymýšľať vlastné riešenia. No a ľahko sa nám tu môže stať, že skončíme ako Seki. Prídeme s geniálnymi nápadmi, ako úloha funguje, ako prísť na správny výsledok, možno niekedy o tom napíšeme aj štvorstranovú esej – a dostaneme za to len zlomok bodov.

1 Nerovnosti s číslami

Náročnosť mnohých dôkazov spočíva v ich všeobecnosti – zväčša je potrebné v nich prebrať veľa, často až nekonečne veľa možností. Preto musíme pracovať s písmenkami alebo inými abstraktnými nástrojmi. Taktiež v mnohých dôkazových úlohách sa písmenká vyskytujú priamo v zadaní. Preto začneme s jednoduchými vecami bez písmenok, iba s číslami. Na začiatok poznamenáme, že niektoré úlohy budú samoúčelové. Nepôjde o žiadne grandiózne objavy, často skôr o triviálne veci. No snažili sme sa ich vybrať tak, aby sme na nich dobre ilustrovali princípy dokazovania a aj aby boli lepšie predstaviteľné.

Začneme s jednoduchou úlohou, na ktorej si ukážeme, čo je to dôkaz. Aby úloha nepôsobila až tak triviálne, tak si odložme bokom kalkulačky. Chvíľku si budeme predstavovať, že neexistujú. Nebojte sa, neskôr si ukážeme aj ako využiť kalkulačky pri takýchto úlohách a ako to spraviť úplne korektne.

Úloha 2. Dokážte, že platí

$$\sqrt{60} > \sqrt{13} + \sqrt{17}.$$

V zadaní máme $\sqrt{60} > \sqrt{13} + \sqrt{17}$, čo je to zač? Ide o nerovnosť[1] Všeobecnejšie vzaté ide o výrok. Výrok je oznamovacia veta, o ktorej možno jednoznačne určiť, či je pravdivá alebo nepravdivá. Hoci to na prvý pohľad ako veta nevyzerá, naozaj ide o oznamovaciu vetu, len je zapísaná matematicky. Slovne by mohla znieť takto: „Odmocnina zo šesťdesiat je väčšia ako súčet odmocniny z trinásť a odmocniny zo sedemnásť.“ Poznamenáme ešte, že formuácia *možno jednoznačne určiť* v definícii výroku sa nevzťahuje na naše schopnosti. Asi nie každý človek (obzvlášť ak neexistujú kalkulačky) vie určiť pravdivostnú hodnotu tohto výroku. Toto je pri niektorých výrokoch bežné. V matematike je veľa výrokov, ktorým matematici nevedia určiť pravdivostnú hodnotu.

My tiež nepoznáme pravdivostnú hodnotu tohto výroku. Jeden zo spôsobov, ako sa dá k takejto dôkazovej úlohe pristúpiť tak, že ideme zisťovať jeho pravdivostnú hodnotu. Formulácia „Dokážte, že“ zo zadania nám len prezrádza, že nám má vyjsť pravda. Aká to výhoda, rovno nám prezradili výsledok. Bez ďalšieho otáľania teda poďme na to a skúsme prísť s nejakým riešením.

Pokus o riešenie 1

Zo školy vieme, že nerovnosti môžeme nejako upravovať, tak poďme na to:

$$\begin{aligned} \sqrt{60} &> \sqrt{13} + \sqrt{17} \qquad |^2 \\ \left(\sqrt{60}\right)^2 &> \left(\sqrt{13} + \sqrt{17}\right)^2 \\ 60 &> 13 + 2\sqrt{13}\sqrt{17} + 17 \\ 60 &> 30 + 2\sqrt{221} \qquad | -30 \\ 30 &> 2\sqrt{221} \qquad | /2 \\ 15 &> \sqrt{221} \qquad |^2 \\ 255 &> 221 \end{aligned}$$

Takto sme sa dostali k niečomu, čo platí, takže aj pôvodná nerovnosť je pravdivá.

Tak čo vravíte na naše riešenie? Presvedčilo vás o tom, že náš výrok je pravdivý? Je to podľa vás korektný dôkaz? Už druhá otázka nám napovedá, čo to asi dôkaz bude. Dôkaz je vlastne niečo, čím presvedčme niekoho o tom, že dokazovaný výrok je pravdivý. Z jedného príkladu sa ťažko rozmýšľa, tak vám ešte pomôžeme druhým.

Úloha 3. Dokážte, že $\sqrt{2} > \sqrt{3}$.

Pokus o riešenie 2

Opäť na to pôjdeme rovnako ako v predlošlom príklade. Teda budeme upravovať dokazovanú nerovnosť:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &> \sqrt{3}, \qquad | -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} - \sqrt{3} &> 0, \qquad |^2 \\ 2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 3 &> 0, \qquad | +2 \cdot \sqrt{6} \\ 5 &> 2 \cdot \sqrt{6}, \qquad |^2 \\ 25 &> 24, \end{aligned}$$

a to je pravda. Preto platí $\sqrt{2} > \sqrt{3}$.

Druhý pokus o dôkaz je zjavne nesprávny, nakoľko sme ním „dokázali“ nepravdivé tvrdenie $\sqrt{2} > \sqrt{3}$ (korektným dôkazom predsa nemôžeme dokázať nepravdivé tvrdenie). Avšak prvý pokus o dôkaz sa principiálne

[1] Možno by ste skôr povedali, že ide o nerovnicu, no to nie je úplne terminologicky správne. Nerovnica je typ úlohy, v ktorej máme nájsť všetky hondoty, pre ktoré platí nejaká nerovnsoť.

od druhého pokusu nelíši. Čiže tiež nebude úplne v poriadku. Poďme sa pozrieť bližšie na to, prečo je druhý pokus zlý.

Výhodou tejto úlohy je, že ľahko vieme vyhodnotiť pravdivosť každého výroku, ktorý sa v našom „dôkaze“ vyskytol. Problém nastáva medzi výrokmi

$$\sqrt{2}-\sqrt{3}>0 \qquad \text{a} \qquad (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2>0.$$

Prvý z nich je totiž nepravdivý a druhý je pravdivý. V akom vzťahu sú tieto dva výroky? Akú logickú operáciu či úvahu sme použili? Vzťah tam máme nasledovný:

$$\sqrt{2}-\sqrt{3}>0 \Rightarrow (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2>0.$$

Keď sa nad tým zamyslíme kus všeobecnejšie, túto implikáciu vieme chápať aj nasledovne: „Ak máme kladné číslo, tak jeho druhá mocnina je tiež kladná.“ Formálne zapísané tiež ako $(\forall x \in \mathbb{R})(x>0 \Rightarrow x^2>0)$.

Problém je však ten, že táto implikácia pripúšťa, že z nepravdy vyplýva pravda. Tento problém vieme opísať aj tak, že sme tu použili tzv. *neekvivalentnú úpravu*, teda z výroku $\sqrt{2}-\sqrt{3}>0$ sme odvodili výrok $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2>0$, ktorý s ním nie je ekvivalentný. Preto je nesprávny aj pokus o dôkaz 1, keďže sme v ňom použili rovnakú neekvivalentnú úpravu. Síce sme došli k správnemu záveru, ale nesprávnym logickým uvažovaním. Toto je veľmi častá chyba pri dokazovaní či vôbec riešení matematických úloh.

Ako to napraviť? Môžeme si uvedomiť, že ak pracujeme v kladných (resp. aj nezáporných) reálnych číslach, tak sa z umocňovania na druhú už stane ekvivalentná úprava. Teda platí $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}$: $(a>b \Leftrightarrow a^2>b^2)$ (odvolávame sa pri tom na stredoškolské vedomosti). Ak teda skontrolujeme, že obe strany sú pred umocnením kladné, tak máme korektný dôkaz.

Dôkaz cez ekvivalentné úpravy

$$\begin{aligned}
\sqrt{60} &> \sqrt{13}+\sqrt{17} \qquad |^2\\
&\Updownarrow \text{ lebo } \sqrt{60}>0,\ \sqrt{13}+\sqrt{17}>0\\
\left(\sqrt{60}\right)^2 &> \left(\sqrt{13}+\sqrt{17}\right)^2\\
&\Updownarrow\\
60 &> 13+2\sqrt{13}\sqrt{17}+17\\
&\Updownarrow\\
60 &> 30+2\sqrt{221} \qquad |-30\\
&\Updownarrow\\
30 &> 2\sqrt{221} \qquad |\,/2\\
&\Updownarrow\\
15 &> \sqrt{221} \qquad |^2\\
&\Updownarrow \text{ lebo } 15>0,\ \sqrt{221}>0\\
255 &> 221
\end{aligned}$$

Avšak ekvivalentné úpravy nie sú až tak nutné. Pozrime sa na to, ako sme dospeli k záveru, že dokazovaný výrok je pravdivý? Jeho pravdivosť sme preniesli od zjavne pravdivého výroku $255>221$ k dokazovanému výroku. A pri tomto „prenose pravdy“ nám stačí, aby sme mali všade len implikácie. A práve tak funguje *priamy dôkaz*: ide o sériu implikácií od pravdivého výroku k dokazovanému výroku. Pri dôkaze nám teda stačí skontrolovať, či smerom „zdola nahor“ platia všetky implikácie. Dôkaz vieme zapísať teda tak ako v riešení vľavo. Ak by sme však chceli byť poriadni, tak dôkaz zapíšeme v poradí, ktoré rešpektuje smer impikácií.

Dôkaz spísaný podľa smeru implikácií

$$\begin{aligned}
255 &> 221 \qquad \mid \sqrt{\ }\text{(obe strany kladné)}\\
15 &> \sqrt{221}\\
30 &> 2\sqrt{221}\\
60 &> 30 + 2\sqrt{221}\\
60 &> 13 + 2\sqrt{13}\sqrt{17} + 17\\
\left(\sqrt{60}\right)^2 &> \left(\sqrt{13}+\sqrt{17}\right)^2 \qquad \mid \sqrt{\ }\text{(obe strany kladné)}\\
\left|\sqrt{60}\right| &> \left|\sqrt{13}+\sqrt{17}\right|\\
\sqrt{60} &> \sqrt{13}+\sqrt{17}
\end{aligned}$$

Dôkaz s vyznačenými implikáciami

$$\begin{aligned}
\sqrt{60} &> \sqrt{13}+\sqrt{17} \qquad |^2\\
&\Uparrow \text{ lebo } \sqrt{60} > 0,\ \sqrt{13}+\sqrt{17} > 0\\
\left(\sqrt{60}\right)^2 &> \left(\sqrt{13}+\sqrt{17}\right)^2\\
&\Uparrow\\
60 &> 13 + 2\sqrt{13}\sqrt{17} + 17\\
&\Uparrow\\
60 &> 30 + 2\sqrt{221} \qquad \mid -30\\
&\Uparrow\\
30 &> 2\sqrt{221} \qquad \mid /2\\
&\Uparrow\\
15 &> \sqrt{221} \qquad |^2\\
&\Uparrow \text{ lebo } 255 > 0,\ 221 > 0\\
255 &> 221
\end{aligned}$$

S dôkazmi ako vpravo sa vieme často stretnúť v matematických textoch.

Pozrieme sa ešte na pár ďalších pokusov o dôkaz. Na počítanie odmocnín máme predsa kalkulačku, tak to do nej naťukáme! Ako však takýto postup správne zapísať? Sú nasledovné dva postupy korektné?

Pokus o riešenie 3

Pomocou kalkulačky vypočítame:
$\sqrt{60} = 7{,}74596669$
$\sqrt{13} = 3{,}60555128$
$\sqrt{17} = 4{,}12310563$
Teda $\sqrt{13}+\sqrt{17} = 3{,}60555128 + 4{,}12310563 = 7{,}72865691$

Pokus o riešenie 4

Pomocou kalkulačky vypočítame: $\sqrt{60} \doteq 7{,}74596669$
$\sqrt{13} \doteq 3{,}60555128$
$\sqrt{17} \doteq 4{,}12310563$
Teda $\sqrt{13}+\sqrt{17} \doteq 3{,}60555128 + 4{,}12310563 = 7{,}72865691$

V pokuse 3 by mal byť problém zjavný: predsa $\sqrt{60} = 7{,}74596669$ nie je pravdivý výrok, nie je to presná hodnota $\sqrt{60}$, ale len približná. Tento problém je už opravený v pokuse 4, kde naozaj je pravda $\sqrt{60} \doteq 7{,}74596669$. Problém je tu však v tom, že čo znamená $\sqrt{60} \doteq 7{,}74596669$? Vieme, že symbol $\doteq$ znamená *približne sa rovná*, ale vieme, čo presne tento pojem znamená po matematickej stránke? Alebo vieme, ako a či vôbec môžeme približné čísla sčítavať? Problém je práve v sčítavaní: pri našom chápaní znaku $\doteq$ ako zaokrúhľovania na dve desatinné miesta platí $\sqrt{13} \doteq 3{,}61$ a $\sqrt{30} = 5{,}48$. Na základe našej úvahy o sčítavaní (ktorú sme použili na konci pokusu 4) by sme tak dostali $\sqrt{13}+\sqrt{30} \doteq 9{,}09$. To však nie je pravda, lebo $\sqrt{13}+\sqrt{30} \doteq 9{,}08$ (overte si všetko na kalkulačke).

Upozorníme, že toto je častý problém pri mnohých dôkazoch, ktorý spočítava v tom, že používame pojmy alebo symboly, ktorým poriadne nerozumieme alebo nie sú jasne definované. V tomto prípade ide len o technický detail, no sú situácie, kedy takéto riešenia majú ďaleko od poriadneho dôkazu, hoci po intuitívnej stránke vyzerajú veľmi presvedčivo.

Tento pokus o dôkaze by sme vedeli opraviť, ak správne použijeme pravidlá pre počítanie s približnými číslami. No netreba vôbec používať takýto overkill. Ukážeme si jednoduchšie riešenie. Hlavná myšlienka spočíva v tom, že problematický vzťah $\doteq$ nahradíme jasnými vzťahmi porovnávania, s ktorými vieme pracovať.

3. spôsob riešenia

1. $60 > 59{,}9076$ (zjavná pravda)
2. $\sqrt{60} > 7{,}74$ (odmocnenie 1.)
3. $13{,}0321 > 13$ (zjavná pravda)
4. $3{,}61 > \sqrt{13}$ (odmocnenie 3.)
5. $17{,}0569 > 17$ (zjavná pravda)
6. $4{,}13 > \sqrt{17}$ (odmicnenie 5.)
7. $7{,}74 = 3{,}61 + 4{,}13 > \sqrt{13}+\sqrt{17}$, lebo je to súčet 4. a 5.
8. $\sqrt{60} > \sqrt{13}+\sqrt{17}$, lebo 2. a 6.

V 6. kroku sme využili, že ak platí $a < c$ a zároveň $b < d$, tak platí aj $a+b < c+d$, pre ľubovoľné reálne čísla a, b, c, d. V 7. kroku sme zas využili, že ak platí $a < b$ a zároveň $b < c$, tak platí aj $a < c$ (pre $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$).

Pri tomto dôkaze pekne vidíme, že dôkazy vôbec nemusia byť lineárne. Nové tvrdenie v dôkazovej postupnosti nemusí vyplývať iba z predošlého, ale môže vyplývať aj z ľubovoľných už dokázaných tvrdení. Stále platí, že takto vieme „preniesť“ pravdu od zjavne pravdivých tvrdení (tvrdenia 1., 3., 5,) postupne k všetkým ostatným a teda aj k dokazovanému tvrdeniu.

Ako takéto dôkazy zapisovať? V tomto prípade sme jednotlivé kroky dôkazu písali pod seba a slovne sme naznačili, na základe čoho sme tvrdenie dostali. Zdôvodnenia v zátvorkách možno vynechať. Taktiež tieto zdôvodnenia možno zaznačiť aj inak. Jedným z ďalších spôsobov je využitie šípok / implikácií, čo z čoho vyplýva.

4. spôsob riešenia

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}13,0321 > 13 \Rightarrow 3,61 > \sqrt{13}\\ 17,0569 > 17 \Rightarrow 4,13 > \sqrt{17}\end{array}\right\} \Rightarrow 7,74 > \sqrt{13}+\sqrt{17}\\ 60 > 59,9076 \Rightarrow \sqrt{60} > 7,74\end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{60} > \sqrt{13}+\sqrt{17}$$

2 Nerovnosť s premennými

Teraz prichádza ten veľký problém s matematiky – písmenká. Väčšina dôkazov, s ktorými sa stretnete totiž obsahuje v sebe písmenká.

Úloha 4. Dokážte, že pre každé nezáporné reálne číslo x platí

$$\sqrt{4x+8} > \sqrt{x}+\sqrt{x+4}.$$

Toto je pomerne typický dôkaz, s ktorým sa stretneme v matematike – máme dokázať, že niečo platí pre *všetky* čísla z nejakej množiny (teraz všetky nezáporné reálne čísla). Ako niečo také dokázať? „Jednoduchá“ predstava je, že vyskúšame všetky hodnoty premennej. Teda $x=0$, $x=9$, $x=13$ (takto dostaneme priamo úlohu 2), ale aj také hodnoty ako $x=\sqrt{2}$, $x=\pi$ a ešte divokejšie. Samozrejme, vyskúšať nekonečne veľa čísel nie je v našich silách. No predstava takéhoto skúšania nám niekedy vie pomôcť.

Pozrime sa na dôkaz tvrdenia pre $x=13$, teda na riešenie úlohy 2. Napravo od neho ponecháme premennú x v našej nerovnosti a pokúsime sa robiť rovnaké úpravy s touto premennou.

$$\begin{array}{l}\sqrt{60} > \sqrt{13}+\sqrt{17} \qquad |^2\\ \Uparrow \text{ lebo } \sqrt{60}>0,\ \sqrt{13}+\sqrt{17}>0\\ \left(\sqrt{60}\right)^2 > \left(\sqrt{13}+\sqrt{17}\right)^2\\ \Uparrow\\ 60 > 13+2\sqrt{13}\sqrt{17}+17\\ \Uparrow\\ 60 > 30+2\sqrt{221} \qquad |-30\\ \Uparrow\\ 30 > 2\sqrt{221} \qquad |\,/2\\ \Uparrow\\ 15 > \sqrt{221} \qquad |^2\\ \Uparrow \text{ lebo } 255>0,\ 221>0\\ 255 > 221\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\sqrt{4x+8} > \sqrt{x}+\sqrt{x+4} \qquad |^2\\ \Uparrow \text{ lebo } \sqrt{4x+8}>0,\ \sqrt{x}+\sqrt{x+4}>0\\ (\sqrt{4x+8})^2 > (\sqrt{x}+\sqrt{x+4})^2\\ \Uparrow\\ 4x+8 > x+2\sqrt{x}\sqrt{x+4}+x+4\\ \Uparrow\\ 4x+8 > 2x+4+2\sqrt{221} \qquad |-(2x+4)\\ \Uparrow\\ 2x+4 > 2\sqrt{x(x+4)} \qquad |\,/2\\ \Uparrow\\ x+2 > \sqrt{x(x+4)} \qquad |^2\\ \Uparrow \text{ lebo } x(x+4)>0,\ x+2>0\\ (x+2)^2 > x(x+4)\end{array}$$

To vyzerá celkom sľubne. Podarilo sa nám dopracovať k pomerne jednoduchej nerovnosti. Narozdiel od čísel, tu nevidíme priamo, či táto nerovnosť platí alebo nie. Ale môžeme ju ďalej upravovať:

$$\begin{array}{c}(x+2)^2 > x(x+4)\\ \Uparrow\\ x^2+4x+4 > x^2+4x\\ \Uparrow\\ 4>0\end{array}$$

A takto sme sa už dostali k niečomu, čo platí. A čo je dôležité, nerovnosť $4 > 0$ platí pre každé nezáporné reálne číslo x. Týmto sme všeobecne dokázali dokazované tvrdenie. A ani to nebolelo. Robili sme vlastne to isté, ako keby tam bolo číslo. Dôležité bolo, že sme používali úpravy, ktoré nezávisia na presnej hodnote premenných, nanajvýš na ich nezápornosti, čo sme vo všetkých prípadoch vedeli zaručiť, keďže x bolo podľa zadania nezáporné. Pre porovnanie, dôkaz s odhadovaním odmocnín by šlo zovšeobecniť ťažko – čo by sme napísali miesto $\sqrt{60} > 7{,}74$? (Napriek tomu to nie je nemožné. Aj rôzne odhady výrazov inými sa pri dôkazoch využívajú.)

2.1 Výrokové formy a kvantifikátory

Celkom typická matematická vec s písmenkami môže vyzerať napríklad takto:

$$x > 5.$$

Alebo slovne: *Číslo x je väčšie ako* 5. O čo ide z pohľadu výrokovej logiky? Je to veta, ale jej pravdivostnú hodnotu určiť nevieme – bráni nám v tom premenná. Nejde teda o výrok. Vo výrokovej logike sa niečo takéto volá *výroková formula*. Ide o vetu, ktorá obsahuje premenné (jednu alebo viac), za ktoré keď dosadíme, tak dostaneme výrok. V tomto prípade napr. dosadením môžeme dostať napr. výroky $6 > 5$, $2 > 5$, $-9 > 5$ či $\pi + \sqrt{3 - \log_7 3} > 5$.

Výroková forma však potrebuje však ešte jednu vec. Musíme špecifikovať, čo za premenné do nej môžeme dosadzovať. Lebo veta $\heartsuit > 5$ asi nie je výrokom (aj keď pri trochu inom prístupe by sme ju mohli prehlásiť za nepravdivý výrok).

Predošlý odsek má svoje výnimky. Môžete sa stretnúť aj zo zápismi štýlu $\forall x\colon p(x)$, kde žiadnu množinu neuvádzame. Toto možno interpretovať dvomi spôsobmi. Prvým vysvetlením je, že týmto zápisom myslíme kvantifikovanie cez všetky x, pre ktoré je výroková formula $p(x)$ definovaná. Druhým kontextom, kde môžete takýto zápis stretnúť je, keď je na inom mieste dané, v akej množine prvkov pracujeme. Ak máme povedané, že pracujeme iba s celými číslami, tak každý kvantifikátor $\forall x$ či $\exists x$ bez množiny kvantifikuje cez množinu celých čísel.

Okrem toho sa zápisy kvantifikátorov bez množín používajú aj pri poriadnom štúdiu výrokovej logiky. Tento prístup slúži hlavne na oddelenie výrokov a množín, aby sa nám nemiešali matematické oblasti. S týmto sa môžete stretnúť napr. keď si pozriete ľubovoľnú sadu axióm k nejakej matematickej teórii, napr. Zermelovu-Fraenkelovu sadu axióm k teórii množín – ako by sme v nich kvantifikovali cez množiny, keďže pomocou týchto axióm definujeme samotné množiny? Existuje vlastne množina všetkých množín, cez ktorú by sme tu mohli kvantifikovať?

Výrokové formuly budeme označovať malým písmenkom, za ktoré do zátvorky napíšeme, ktoré premenné obsahuje. Napríklad:

- $a(x) \equiv x > 5$, $x \in \mathbb{R}$;
- $b(y) \equiv 6 \mid y$, $y \in \mathbb{N}$;
- $c(k, l) \equiv \mathrm{NSD}(a, b) = 1$, $a, b \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$;
- $d(x, y) \equiv x$ je otcom y, x, y sú ľudia;
- $e(x, y, z) \equiv x^2 + 2y^4 - \sqrt{5z} = 47xy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^+$.

Okrem dosadenia však existuje ďalší spôsob, ako z výrokovej formy $p(x)$ spraviť výrok. Ide o *kvantifikovanie*. V matematike poznáme dva základné spôsoby, ako môžeme kvantifikovať. Vieme tak dostať výrok

- „Pre všetky x z množiny M platí $p(x)$." – symbolicky zapisujeme $\forall x \in M\colon p(x)$.
- „Existuje x z množiny M platí $p(x)$." – symbolicky zapisujeme $\exists x \in M\colon p(x)$.

Pri kvantifikácii je dôležité uviesť množinu, cez ktorú kvantifikujeme.[2] Predsa len $\forall x \in \mathbb{Z}^+ \colon 2x > x$ je niečo iné ako $\forall x \in \mathbb{R} \colon 2x > x$. Tieto výroky môžeme prečítať slovne aj nasledovne: „Dvojnásobok ľubovoľného *prirodzeného* čísla je väčší ako číslo samotné“ a „Dvojnásobok ľubovoľného *reálneho* čísla je väčší ako číslo samotné“. Tu vidíme aj to, že pri čítaní takýchto výrokov, nemusíme dodržať presnú formuláciu „Pre všetky...“ – niekedy tak dostaneme výrok ľahší na pochopenie.

2.2 Dôkazy kvantifikovaných výrokov

Teraz sa pozrieme na to, ako dokazovať pravdivosť alebo nepravdivosť výrokov. Teda, pozrieme sa rovno na zisťovanie pravdivostnej hodnoty. No hoci úlohy budú o zisťovaní, budeme v nich chcieť úplné riešenie vrátane dôkazu.

Úloha 5. Určte pravdivostnú hodnotu výroku

$$\exists x \in \mathbb{R} \colon 3x + 2 > 2x + 5.$$

Opäť vám ponúkame dva pokusy o riešenie.

Pokus o riešenie

Pokus o riešenie 1 Nerovnosť

$$3x + 2 > 2x + 5$$

si odčítaním $2x$ a odčítaním 2 ekvivalentne upravíme na

$$x > 3.$$

Toto, a teda aj nerovnosť $3x + 2 > 2x + 4$ platí pre všetky reálne čísla väčšie ako 3, teda výrok je pravdivý.

Pokus o riešenie

Pokus o riešenie 2 Sčítame všetky čísla v zadaní:

$$3 + 2 + 2 + 5 = 12.$$

Dosadáme $x = 12$, čím máme na ľavej strane $3 \cdot 12 + 2 = 38$ a na pravej strane $2 \cdot 12 + 5 = 29$. Vyšlo nám $38 > 29$, čo je pravda, teda také $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí $3x + 2 > 2x + 5$ existuje. Výrok teda platí.

Možno vás teraz prekvapíme, ale správne sú teraz obe riešenia. A možno vás ešte prekvapíme aj tým, keď povieme, že druhý pokus je o niečo lepší. Spomeňme si, že dôkaz slúži na presvedčenie čitateľa o pravdivosti nášho tvrdenia. A ako niekoho presvedčíme o existencii niečoho? Najjednoduchšie tak, že mu to ukážeme.

Prvé riešenie je zbytočne zložité. Možno je to tým, že keď vidíme nerovnicu, tak máme nutkanie ju vyriešiť zaužívaným školským postupom. Takto si však pridávame prácu a tiež zvyšujeme šancu na to, že sa niekde pomýlime. Isto, teraz nám to príde banálne a irelevantné. No táto poznámka bude relevantná hlavne pri zložitejších úlohách.

Ideálne riešenie takejto úlohy teda obsahuje len posledné dva riadky. Dokonca ich vieme skrátiť do nasledovného tvaru.

Riešenie úlohy 5

Pre $x = 12$ máme $38 > 29$, teda výrok platí.

[2] Napriek tomu sa vieme stretnúť aj so zápismi typu $\forall x \colon a(x)$ bez uvedenia množiny. V takom prípade kvantifikujeme Tento zápis je typický pre vysokoškolskú matematickú logiku

Objavili sme tak v podstate najjednoduchšiu formu dôkazu, ktorú vieme zhrnúť asi takto.

Pravdivosť tvrdenia tvaru $\exists x \in M\colon p(x)$ dokazujeme tak, že uvedieme príklad konkrétneho prvku x z množiny M a dokážeme, že pre tento prvok platí $p(x)$.

Hoci tento typ dôkazu vyzerá jednoducho, nemusí tomu byť vždy tak. Aj po dosadení konkrétnej hodnoty do $p(x)$ môžeme dostať nejaký výrok, ktorého pravdivosť nebude triviálne dokázať – pozrite sa na nejaké náročné dôkazy z predošlej sekcie.

Teraz by ste mohli túto úlohu zvládnuť vyriešiť.

Úloha 6. Určte pravdivostnú hodnotu výroku

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon 3x + 2 > 2x + 5.$$

Riešenie úlohy 6

Dosadením $x = 0$ dostaneme $2 > 5$, čo neplatí. Preto je výrok zo zadania nepravdivý.

Čiže v prípade, že všeobecný výrok neplatí, tak dôkaz máme tiež jednoduchý.

Nepravdivosť tvrdenia tvaru $\forall x \in M\colon p(x)$ dokazujeme tak, že uvedieme príklad konkrétneho prvku x z množiny M a dokážeme, že pre tento prvok neplatí $p(x)$.

3 Prehľad dokazovania

Typy dôkazov podľa spôsobu uvažovania

Priamy dôkaz

Pravdivosť výroku V dokážeme tak, že nájdeme postupnosť výrokov $A_0, A_1, \ldots, A_n$ s vlastnosťou

$$A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n \Rightarrow V,$$

kde A_0 je výrok, o ktorom vieme, že je pravdivý (napr. sme ho už dokázali alebo je to známe pravdivé tvrdenie). Teda každý z výrokov $A_1, \ldots, A_n, V$ vyplýva z predošlého výroku.
Priamy dôkaz vieme používať aj vtedy, keď platnosť každého výroku vyplýva z ľubovoľných predošlých výrokov v dôkaze (teda nie nutne len z jedného bezprostredne predošlého).

Dôkaz sporom

Výrok V dokážme sporom nasledovne. Predpokladáme, že výrok platí negácia výroku V. Z tohto predpokladu odvodíme (napr. ako pri priamom dôkazov) platnosť nepravdivého tvrdenia. Teda dokážeme

$$V' \Rightarrow N,$$

kde N je nepravdivé tvrdenie. Jeho štruktúra vyzerá zväčša nasledovne:

> Tvrdenie V dokážme sporom. Nech platí V'. Potom
> … *(Reťaze úvah ako pri priamom dôkaze)*
> Teda platí N, čo je v spor.

Spor často dostávame tým, že postupne dokážeme nejaké tvrdenie, aj jeho negáciu. Napríklad:

> Tvrdenie V dokážme sporom. Nech platí V'. Potom
> …
> Preto n je párne číslo
> …
> Teda n je nepárne číslo, čo je v spor tým, že je párne.

V takomto prípade, keď sme v závere nedostali tvrdenie, ktoré je samo o sebe nepravdivé (napr. n je nepárne číslo – to kľudne môže byť pravda), je odporúčané dopísať, s čím je toto tvrdenie v spore (alebo naznačiť šípkou).

Dokazovanie kvantifikovaných výrokov

Dôkaz existenčného výroku

Výrok tvaru $\exists x \in M : v(x)$ najľahšie dokážeme tak, že nájdeme jedno x z množiny M, pre ktoré platí výroková forma $v(x)$. Takýto dôkaz má štruktúru

Pre $x = 9$ platí $v(9)$, lebo $\langle$*Dôkaz výroku* $v(9)\rangle$.

Samozrejme, miesto 9 zvolíme správne číslo alebo prvok. Dokonca môžeme použiť aj výraz s premennými, ak dokazujeme len výrokovú formu vnútri zložitejšieho výroku.

Dôkaz všeobecného výroku

Výrok tvaru $\forall x \in M : v(x)$ najľahšie dokážeme tak, že spravíme dôkaz „výroku“ $v(x)$, v ktorom budeme používať premennú x.

Nech x je ľubovoľný prvok M. Potom platí $\langle$*Dôkaz výroku* $v(x)\rangle$.

Samozrejme, existujú aj iné typy dôkazov. Obzvlášť pri existenčných tvrdeniach je viacero dôkazov, ktoré nezačínajú určením hľadanej hodnoty.

Prehľad dokazovania výrokov podľa štruktúry

Tu je prehľad základných štruktúr dôkazu podľa typu výroku, ktorý máme dokazovať. Defaultne tak dostaneme priamy dôkaz, ale nič nám nebraní pred dokazovaním si dokazované tvrdenie upraviť na iné (nepriamym dôkazom či matematickou indukciou).

$A \wedge B$: Dokážme A a potom dokážeme B.

$A \vee B$: Rozdelíme dôkaz na dva prípady (napr. ak je nejaké číslo párne alebo nepárne). Z jedného dokážeme A a zdruhého dokážeme B.

$A \Rightarrow B$: Predpokladáme, že A platí a dokážeme B.

$A \Leftrightarrow B$: Dokážeme $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$.

- ⋄ V niektorých prípadoch je možné nájsť postupnosť ekvivalentých úprav od výroku A k B. Tu však treba byť obozretný, či naozaj všetky sú ekvivalentné. Pre lepšiu kontrolu odporúčame skontrolovať, či sú všetky úvahy správne jedným aj druhým smerom.

$(\forall x)a(x)$: Dokážeme $a(x)$ za použitia premennej x.

$(\exists x)a(x)$: Ukážeme platnosť $a(x)$ pre jednu konkrétnu voľbu premennej x (napr. dokážeme $a(47)$). Pri voľbe x môžeme použiť aj premenné, ale iba ak už v našom dôkaze nejaké máme definované (a nesmú byť „zakryté“ kvantifikátorom).

Prehľad logických úsudkov podľa štruktúry výroku

A tu je prehľad základných logických krokov, ktoré vieme počas dokazovania robiť. Opäť pre každý z najčastejších typov výrokov uvádzame, čo z neho možno odvodiť.

- $A \wedge B$: Vieme odvodiť platnosť A, rovnako aj platnosť B.
- $A \vee B$: Vieme rozdeliť dôkaz na dve časti, v jednej predpokladáme platnosť A a v druhej platnosť B (vhodné pri dokazovaní výrokov so spojkou alebo).
- $A \Rightarrow B$: Ak máme už dokázané A, vieme odvodiť platnosť B
- $A \Leftrightarrow B$: Rovnako ako pri $A \Rightarrow B$, príp. $B \Rightarrow A$.
- $(\forall x)a(x)$: Vieme za x dosadiť honotu a odvodiť pre ňu platnosť výroku (napr. $a(47)$, ak sme v celých číslach).
- $(\exists x)a(x)$: Zavedieme **novú** premennú, napr. c, a odvodíme platnosť $a(c)$.

4 Ako robiť dôkazy tautológií

Dôkaz nekvantifikovanej tautológie

Úloha 7. Rozhodnite, či zložený výrok

$$[(a \Rightarrow b) \wedge (c \vee d) \wedge ((\neg a \wedge c) \Rightarrow e)] \Rightarrow [\neg b \Rightarrow (e \vee d)]$$

je tautológia.

Zápis riešenie cez postupnosť tvrdení

Výrok je tautológia. Dôkaz sporom.

1. Nech platí $\neg[[(a \Rightarrow b) \wedge (c \vee d) \wedge ((\neg a \wedge c) \Rightarrow e)] \Rightarrow [\neg b \Rightarrow (e \vee d)]]$
2. $(a \Rightarrow b) \wedge (c \vee d) \wedge ((\neg a \wedge c) \Rightarrow e)$ (z 1.)
3. $\neg[\neg b \Rightarrow (e \vee d)]$ (z 1.)
4. $\neg b$ (z 3.)
5. $\neg(e \vee d)$ (z 3.)
6. $\neg e$ (z 5.)
7. $\neg d$ (z 5.)
8. $a \Rightarrow b$ (z 2.)
9. $\neg a$ (z 4. a 8.)
10. $(c \vee d)$ (z 2.)
11. c (z 7. a 11.)
12. $(\neg a \wedge c) \Rightarrow e$ (z 2.)
13. $\neg a \wedge c$ (z 9. a 11.)
14. e (z 12. a 13.) – to je spor s 6.

Pri dôkaze sporom je potrebné napísať, že ideme dokazovať sporom (kľudne aj jedným slovom. A následne označiť, čo je s čím v spore (v našom prípade 6. a 14.). Pri takýchto riešeniach často hovoríme o tom, že nejaký výrok platí alebo neplatí. To sa dá značiť viacerými spôsobmi.

- Pravdivé výroky môžeme písať len tak ako krok (napr. body 2., 8., 10., 14.), nepravdivé vieme písať formou, že platí ich negácia (napr. body 1., 3., 4, 5.). (Toto je použité aj v riešení)
- Pravdivosť vieme vyjadriť ekvivalenciou s pravdivostnou hodnotou, napr.
  1. $[[(a \Rightarrow b) \wedge (c \vee d) \wedge ((\neg a \wedge c) \Rightarrow e)] \Rightarrow [\neg b \Rightarrow (e \vee d)]] \Leftrightarrow 0$
  4. $b \Leftrightarrow 0$
  8. $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow 1$
  14. $e \Leftrightarrow 1$

  Pritom si však dávajte pozor, aby to nevyzeralo ako dosadenie pravdivostnej hodnoty za elementárny výrok.

- Použiť ohodnotenie / valuáciu výrokov v:
    1. $v([(a \Rightarrow b) \wedge (c \vee d) \wedge ((\neg a \wedge c) \Rightarrow e)] \Rightarrow [\neg b \Rightarrow (e \vee d)]) = 0$
    14. $v(e) = 1$

  Tento spôsob sa často používa pri hlbšom štúdiu matematickej logiky. Na tomto predmete však nie je nutné sa ním zaobrať.

Ešte si ukážeme, že dôkazy sa dajú zapisovať aj ako text. Tento text zároveň aj detailnejšie vysvetľuje, čo sa deje v predšlom symbolickom dôkaze. Záver je mierne odlišný.

Zápis riešenia textom

Sporom. Nech neplatí $[(a \Rightarrow b) \wedge (c \vee d) \wedge ((\neg a \wedge c) \Rightarrow e)] \Rightarrow [\neg b \Rightarrow (e \vee d)]$. Potom $(a \Rightarrow b) \wedge (c \vee d) \wedge ((\neg a \wedge c) \Rightarrow e)$ platí a výrok $\neg b \Rightarrow (e \vee d)$ neplatí. Z neskoršieho dostávame, že $\neg b$ je pravda, teda $b \Leftrightarrow 0$; a tiež $e \vee d$ neplatí, teda $e \Leftrightarrow 0$ a $d \Leftrightarrow 0$. Z pravdivého výroku $(a \Rightarrow b) \wedge (c \vee d) \wedge ((\neg a \wedge c) \Rightarrow e)$ vieme, že $(a \Rightarrow b)$ platí. Preto keďže $b \Leftrightarrow 0$, tak aj $a \Leftrightarrow 0$. Tiež nám platí $(c \vee d)$, z čoho vďaka $d \Leftrightarrow 0$ máme, že $c \Leftrightarrow 1$. Napokon nám platí aj $(\neg a \wedge c) \Rightarrow e$. Keď tam však dosadíme určené pravdivostné hodnoty, tak nám vyjde $(1 \wedge 1) \Rightarrow 0$, čo však pravda nie je, a to je spor.

Dôkaz ne-tautológie

Úloha 8. Rozhodnite, či nasledovný zložený výrok je tautológia

$$[(\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge d) \vee (e \wedge \neg c \wedge \neg a)] \Rightarrow [(\neg b \wedge \neg c) \Rightarrow a].$$

Ak chceme dokázať, že zložený výrok nie je tautológia, máme to jednoduché – stačí nám uviesť jeden prípad, kedy nám vyjde nepravda + vyhodnotiť (resp. aspoň naznačiť vyhodnotenie výroku).

Riešenie

Nejde o tautológiu, lebo pre $a \Leftrightarrow 0$, $b \Leftrightarrow 0$, $c \Leftrightarrow 0$, $d \Leftrightarrow 1$, $e \Leftrightarrow 1$ vyjde nepravda:

$$\underbrace{\underbrace{[(\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge d) \vee \underbrace{(e \wedge \neg c \wedge \neg a)}_{1}]}_{1} \Rightarrow \underbrace{[\underbrace{(\neg b \wedge \neg c)}_{1} \Rightarrow \underbrace{a}_{0}]}_{0}}_{0}$$

Upozorňujeme, na časté nesprávne (neúplné riešenie)

Nesprávne riešenie

Pre spor predpokladajme, že výrok neplatí

1. $\neg[[(\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge d) \vee (e \wedge \neg c \wedge \neg a)] \Rightarrow [(\neg b \wedge \neg c) \Rightarrow a]]$
2. $(\neg b \wedge \neg c) \Rightarrow a$ (z 1.)
3. $(\neg b \wedge \neg c)$ (z 2.)
4. $\neg b$ (z 3.)
5. $\neg c$ (z 3.)
6. $\neg a$ (z 2.)
7. $(\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge d) \vee (e \wedge \neg c \wedge \neg a)$ (z 1.)
8. $\neg(\neg a \Rightarrow b)$ (z 4. a 6.)
9. $\neg(c \wedge d)$ (z 5.)

10. $e \wedge \neg c \wedge \neg a$ (z 7., lebo prvé dva výroky v disjunkcii sú nepravdivé, tak musí platiť tretí)

11. e (z 10.)

Dostali sme ohodnotenie elementárnych výrokov, kedy platí $a \Leftrightarrow 0$, $b \Leftrightarrow 0$, $c \Leftrightarrow 0$, $e \Leftrightarrow 1$ (d môže byť aj pravda, aj nepravda). Teda výrok nie je tautológia.

Hoci takto zrejme budete riešiť takéto úlohy, toto nie je dôkaz – vychádzame totiž z predpokladu, že zložený výrok neplatí a tak nemôžeme dokázať, že naozaj neplatí. Dokonca v takejto situácii môžeme dojsť aj nesprávnemu záveru (teda by výrok bol tautológiou) – to, že sa nám nepodarilo dostať ku sporu, neznamená, že tam niekde skrytý nie je.

V takejto situácii potrebujeme overiť, že pre nami nájdené ohodnotenie elementárnych výrokov nám vyjde naozaj nepravda (alebo to iným spôsobom zdôvodniť, ale overenie je najjednoduchšie a najistejšie). Je to rovnaká situácia, ako keď pri riešení rovnice (či sústavy rovníc) nám nestačí dospieť k tomu, že $x = 17$, $y = 42$ a $z = 47$, ale potrebujeme ešte vykonať skúšku správnosti (alebo iným spôsobom odargumentovať, že nami nájdené riešenie vyhovuje).

Kvantifikované tautológie

Úloha 9. Dokážte, že výrok

$$(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))$$

je tautológia.

Priamy dôkaz

1. Nech platí $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x))$.
Dokážeme, že platí $(\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)$:
    2. Nech platí $(\forall x)a(x)$.
    Dokážeme, že platí $(\forall x)b(x)$:
        Pre každé x platí:
            3. $a(x)$ (lebo 2.)
            4. $a(x) \Rightarrow b(x)$ (lebo 1.)
            5. $b(x)$ (lebo 3. a 4.)
        Teda platí $(\forall x)b(x)$.
    Teda platí $(\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)$
Teda platí $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))$

Komentár. Dokazovaná tautológia má formu implikácie. Tú dokazujeme priamo tak, že predpokladáme pravdivosť ľavej strany a ukážeme, že platí aj pravá strana. Keďže na pravej strane je opäť implikácia, tak tento postup zopakujeme. Dôkazy týchto dvoch implikácií sú v červených rámčekoch. Dostaneme sa k dokazovaniu výroku v tvare všeobecného kvantifikátora (modrý rámček). Ten dokazujeme tak, že napíšeme dôkaz kvantifikovanej výrokovej formy všeobecne za pomoci premennej (zlený rámček). Všimnite si, že vnútri zeleného rámčeka nemáme žiadne kvantifikátory. Do vašich riešení nemusíte písať tento komentár. Tiež môžete vypustiť aj závery „Teda platí…“

Dôkaz sporom

Pre spor predpokladajme, že (pre nejaké univerzum a nejaké výrokové formy $a(x)$, $b(x)$ na ňom definované) platí negácia, teda:

1. $\neg[(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))]$

2. $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \wedge \neg[(\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)]$ (negácia 1.)

3. $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x))$ (lebo 2.)

4. $(\exists x)(a(x) \wedge \neg b(x))$ (lebo 2. + negácia)

5. $a(c) \wedge \neg b(c)$ pre nejaký prvok c (lebo 4.) (tu sme zaviedli do nášho dôkazu **novú** premennú c, ktorou sme označili prvok univerza, ktorého existenciu zaručuje výrok 4.)

6. $a(c) \Rightarrow b(c)$ (lebo 2. platí pre všetky prvky univerza, teda aj pre naše c)

7. $\neg(a(c) \Rightarrow b(c))$ (negácia 5.) – SPOR s tvrdením 6.

Časti písané šedou slúžia pre lepšie objasnenie, do riešenia takto podrobne netreba písať.

Úloha 10. Rozhodnite, či výrok

$$(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \leftrightarrow (\forall x)b(x))$$

je tautológia.

Oproti predošlej úlohe sme teraz implikáciu nahradili ekvivalenciou. Tým však už výrok tautológiou neostane. To vieme dokázať dosadením, kedy nám vyjde nepravda:

Riešenie

Na doméne $\{1,2\}$ definujme $a(x) \Leftrightarrow x = 1$, $b(x) \Leftrightarrow x = 2$. Po dosadení dostávame výrok

$$\underbrace{(\forall x \in \{1,2\})(x = 1 \Rightarrow x = 2)}_{\text{0, lebo neplatí pre } x=1} \Leftrightarrow (\underbrace{(\forall x \in \{1,2\})(x = 1)}_{\text{0, lebo neplatí pre x = 2}} \Rightarrow \underbrace{(\forall x \in \{1,2\})(x = 2)}_{\text{0, lebo neplatí pre } x=1},$$

ktorého pravdivostná hodnota je 0.

Ako vieme na takéto dosadenie prísť? Výrokové formy si vieme predstaviť ako tabuľky, kde pre každý prvok univerza máme napísané pravdivostnú hodnotu, teda tabuľku s hlavičkou

x	$a(x)$	$b(x)$

Poďme teda nájsť také výrokové formy, pre ktoré nebude platiť $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))$. Keďže ide o ekvivalenciu. Máme dve možnosti: $1 \Leftrightarrow 0$ alebo $0 \Leftrightarrow 1$. Pri prvej možnosti sa nám dariť nebude (možno aj dôjdeme k sporu a dokážeme, že ide o tautológiu, ako vyššie). Preto skúsime druhú možnosť:

$$\underbrace{(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x))}_{0} \Rightarrow \underbrace{((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))}_{1}$$

Z toho, že $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x))$ neplatí máme, že platí $(\exists x)(a(x) \wedge \neg b(x))$, teda existuje riadok tabuľky, v ktorom máme 1 a 0.

x	$a(x)$	$b(x)$
	1	0

Keďže $b(x)$ je už niekedy 0, tak výrok $(\forall x)b(x)$ neplatí. Avšak má platiť $(\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)$, preto $(\forall x)a(x)$ tiež neplatí. Teda v niektorom riadku musí mať $a(x)$ nulu.

x	$a(x)$	$b(x)$
	1	0
	0	

Prešli sme už všetko. Tak nám už ostáva len dokončiť tabuľku – voľné miesto v $b(x)$ vyplníme ľubovoľne a nejako si pomenujeme prvky x univerza, napr. 42 a 47. Dostávame teda výrokové formy definované na $\{42,47\}$ ako:

x	$a(x)$	$b(x)$
42	1	0
47	0	0

Pre tie už ľahko overíme, že nám vyjde nepravdivý výrok.