

Dobble

Jozef Rajník, 8. 5. 2021

Dobble je kartová hra so špeciálnymi kartičkami. Ich dôležitými vlastnosťou je

- Každá karta obsahuje práve n symbolov.
- Na každých dvoch kartách je práve jeden rovnaký symbol.

Konkrétne, v hre Dobble máme $n = 8$. My však na prednáške budeme pracovať so všeobecnou verziou a skúšať si na nich veci.

Úloha 1. Koľko najviac môžeme mať Dobble kartičiek pre $n = 2$?

Áno, odpoveď je, že ich môžeme mať koľko len chceme – každá karta obsahuje symbol 1 a svoj unikátny symbol. Avšak s takýmito kartičkami by sa hralo trápne. Preto pridáme ďalšiu podmienku

- Existujú tri karty, z ktorých každé dve majú iný spoločný symbol.

Úloha 2. Koľko najviac môžeme mať Dobble kartičiek pre $n = 3$?

Úloha 3. Pre zadané n a symbol S , koľko najviac môžeme mať Dobble kartičiek so symbolom S ?

Úloha 4. Vite z toho zistiť horný odhad počtu Dobble kartičiek pre zadané n ?

Úloha 5. Skúšajte. Pre ktoré n sa vám podarí tento horný odhad dosiahnuť? Pokúste sa ich nájsť čo najviac.

Čo vieme o Dobble kartičkách, kde na každej je n symbolov, zistiť?

- Daný symbol S sa môže nachádzať najviac na n kartičkách.
- Nemôžeme mať viac ako $n^2 - n + 1$ kartičiek.

Úplnou sadou dobble kartičiek nazveme sadu, pre ktorú platí:

- Každá karta obsahuje práve n symbolov.
- Na každých dvoch kartách je práve jeden rovnaký symbol.
- Existujú tri karty, z ktorých každé dve majú iný spoločný symbol.
- Sada obsahuje práve $n^2 - n + 1$ kartičiek.

Ekvivalentne možno túto úplnú sadu definovať o niečo viac prirodzenejšie nasledovnými podmienkami:

- Na každých dvoch kartách je práve jeden rovnaký symbol.
- Každé dva symboly sa nachádzajú spolu práve na jednej karte.
- Existujú štyri karty, z ktorých každé dve majú iný spoločný symbol.

V prípade, že $n = p + 1$, kde p je prvočíslo, tak vieme Dobble kartičky skonštruovať nasledovne:

- Symboly, ktoré chceme na ne použiť si označíme $a, b_0, b_1, \dots, b_p$ a $c_{r,s}$ pre všetkých p^2 usporiadaných dvojíc $r, s \in \{0, 1, \dots, p-1\}$.
- Spravíme kartičku $\{a, b_0, b_1, \dots, b_p\}$
- Pokračujeme vytvorením kartičiek $\{a, c_{r,0}, c_{r,1}, \dots, c_{r,p-1}\}$ pre každé $r \in \{0, 1, \dots, p-1\}$
- Na záver vytvoríme kartičku pre každé $r, s \in \{0, 1, \dots, p-1\}$: na ňu dáme symbol b_r a pre karé $p \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ symbol c s indexom $(r, (r+ps) \bmod p)$.

Úloha 6. Presvedčte sa, že nami opísaná konštrukcia ÚSDK je správna.

Keďže konštrukcia nám závisí od vlastnosti čísla $m = n-1$, tak sa úplné sady Dobble kartičiek študujú v závislosti od $n-1$. Teda takáto úplná sada má mať:

- $m+1$ symbolov na kratičke,
- $m+1$ kartičiek obsahujúcich rovnaký symbol,
- $m^2 + m + 1$ kartičiek
- $m^2 + m + 1$ symbolov.

Pre ktoré hodnoty m existuje úplná sada Dobble kartičiek

- ak m je prvočíslo – tú sme si ukázali;
- ak m je celočíselná mocnina prvočísla – tú si naznačíme o týždeň;
- sú známe aj iné príklady ÚSDK, ak m je mocnina prvočísla;
- ak $m = 4k+1$ alebo $m = 4k+2$ a m nemožno zapísať ako súčet dvoch štvorcov, tak ÚSDK neexistuje (Bruck-Ryserova veta, 1949);
- ak $m = 10$ – vylúčené pomocou počítača;
- pre zvyšné hodnoty m (počnúc $m = 12$) nepoznáme odpoveď.

Hypotéza 1. Ak m nie je mocninou prvočísla, tak pre m neexistuje ÚSDK.