

Klietky

Jozef Rajník

Definície pojmov:

- k -regulárny graf je taký, kde každý vrchol má stupeň práve k .
- *obvod* grafu je dĺžka najkratšej kružnice
- (k, g) -graf je k -regulárny graf s obvodom presne g
- (k, g) -klietka je najmenší (k, g) -graf
- veľkosť (k, g) -klietky označujeme $n(k, g)$

Problém klietok spočíva v hľadaní hodnôt $n(k, g)$. Začneme s tým, že si určíme tieto hodnoty pre nejaké triviálne prípady. Skúste sa zamyslieť aj sami, aké by to boli.

Úloha 1. Určte hodnoty $n(2, g)$ a $n(k, 3)$.

Úloha 2. Určte hodnotu $n(k, 4)$

Budeme sa venovať hlavne prípadu $k = 3$. Tieto 3-regulárne grafy sa tiež nazývajú *kubické*. Tiež začneme s malými prípadmi. Pri nich sa už oplatí objaviť nejaký dolný odhad.

Úloha 3. Určte hodnotu $n(3, 5)$.

Úloha 4. Určte hodnotu $n(3, 6)$.

Môžete skúšať určovať hodnoty $n(3, g)$ pre vyššie hodnoty g . Mali by ste prísť aspoň na nejaký všeobecný dolný odhad.

Zovšeobecnenie

- Graf je cyklicky l -súvislý, ak neexistuje množina l hrán, ktoré keď odstránime, tak dostaneme aspoň dva cyklické komponenty súvislosti.
- $(3, g, s)$ -graf je graf, ktorý má obvod g , všetky vrcholy stupňa k až na s vrcholov stupňa 2. O niečo širšia definícia miesto s vrcholov stupňa 2 pripúšťa s polhrán, ktoré vychádzajú len z jedného vrchola a ich druhý koniec neobsahuje vrchol.
- $(3, g, s)$ -graf je *netriviálny*, ak je súvislý, cyklický a nie je to cyklus dĺžky g .

Úloha 5. Dokážte, že existuje najmenší netriviálny $(3, g, s)$ -graf, pre ktorý platí:

- a) Žiadne dve polhrany nevychádzajú z toho istého vrchola.
- b) má aspoň dva vrcholy stupňa 3 (toto je relevantné len pre rozšírenú verziu pojmu)
- c) má aspoň tri vrcholy stupňa 3 – tu však treba predpokladať, že $g \geq x$, určte najmenšiu hodnotu x , pre ktorú to platí
- d) pre $g \geq x$ neobsahuje dva susedné vrcholy stupňa 2

Úloha 6. Dokážte, že pre $1 \leq s < g$ platí $n(3, g, s) \geq n(3, g, s + 1) + 1$

Úloha 7. Odhadnite $n(3, 13, 12)$, príp. aj $n(3, 13, 13)$.

Úloha 8. Na základe predošlého odhadu dokážte, že $(3, 13)$ -klietka je cyklicky 13-súvislá a každý cyklus separujúci rez v ju rozdeľuje na kružnicu dĺžky 13 a iný komponent.

Úloha 9. Nájdite všeobecný odhad pre $n(3, g, s)$.

Úloha 10. Dokážte, že $n(3, g) > \frac{1}{2}M(3, g)$, kde $M(3, g)$ je Mooreovský dolný odhad na veľkosť $(3, g)$ -klietky.