

Toky v grafoch

Jozef Rajník

Čo je to *tok*?

- Máme danú nejakú množinu M , jej prvky musíme vedieť sčítavať.
- Každdej hrane priradíme nejakú orientáciu a prvo z M .
- V každom vrchole musí platiť *Kirchhoffov zákon*: teda súčet hodnôt, čo do neho po hranách vchádza je rovný súčtu vychádzajúcich hodnôt.

Pozrime sa na prípad, keď $M = \{1, 2, \dots, k-1\}$ (príp. je to ekvivalentné s $\{-k+1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, k-1\}$). Takýto tok voláme nikde nulový k -tok. Príp. k -tok, ak dovoľíme na hranách aj 0.

Úloha 1. Ktoré grafy majú nikde nulový 2-tok.

Úloha 2. Pre nasledovné grafy určte najmenšie také celé číslo k , že daný graf má nikde nulový k -tok: úplné grafy, kocka, prevrátená kocka, Petersenov graf.

Úloha 3. Nech G je kubický graf. Dokážte, že

- G má nikde nulový 3-tok práve vtedy, keď je bipartitný
- G má nikde nulový 4-tok práve vtedy, keď je hranovo-3-zafarbiteľný.

Úloha 4. Dokážte, že každý graf bez mostu má nikde nulový tok pre nejaké k .

- Vedeli by ste určiť aj nejaké pevné k , ktoré by stačilo pre všetky grafy?

Modulárny k -tok je tok celočíselný nikde nulový k -tok, kde nevyžadujeme, aby v každom vrchole sedel súčet vchádzajúcich a vychádzajúcich hrán presne, ale stačí keď sedí modulo k .

Veta 1. Graf má nikde nulový modulárny k -tok práve vtedy, keď má nikde nulový k -tok.

Čo ak si za M nezvolíme množinu obsahujúcu bežné čísla?

- $\mathbb{Z}_n$ – množina zvyškov po delení číslom n , sčítavame ich ako sa sčítavajú zvyšky – zodpovedá modulárnym tokom.
- $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ – množina usporiadaných dvojíc, možno

Veta 2. Pre daný graf počet jeho rôznych nikde nulových tokov závisí len od $|M|$, teda nie od toho, aké prvky M obsahuje.