

Úlohy pred krasjkým kolom MO A

Jozef Rajník

Úloha 1. Na tabuli sú napísané rôzne kladné čísla. Ich aritmetický priemer je desatinné číslo, ktorého desatinná časť je presne 0,2016. Akú najmenšiu hodnotu môže tento priemer mať? [MO65-A-II-1]

Úloha 2. Koľkými spôsobmi sa dá rozdeliť množina $\{1, 2, \dots, 12\}$ na šesť disjunktných dvojprvkových podmnožín takých, že každá z nich obsahuje navzájom nesúdeliteľné čísla? [MO65-A-II-3]

Úloha 3. Nájdite všetky dvojice prvočísel (p, q) také, že hodnota výrazu $p^2 + 5pq + 4q^2$ je druhou mocninou celého čísla. [MO64-A-II-2]

Úloha 4. Daný je trojuholník ABC s tupým uhlom pri vrchole C . Os o_1 úsečky AC pretína stranu AB v bode K , os o_2 úsečky BC pretína stranu AB v bode L . Priesečník osí o_1 a o_2 označme O . Dokážte, že stred kružnice vpísanej do trojuholníka KLC leží na kružnici opísanej trojuholníku OKL . [64MO-A-II-1]

Úloha 5. Daných je 21 rôznych čísel takých, že súčet ľubovoľných jedenástich z nich je väčší ako súčet desiatich zvyšných čísel.

a) Dokážte, že každé z daných čísel je väčšie ako 100.

b) Určte všetky také skupiny 21 rôznych čísel, ktoré obsahujú číslo 101.

[MO62-A-II-1]

Úloha 6. Dokážte, že ak pre reálne čísla a, b, c platí

$$a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 = a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2,$$

tak majú niektoré dve z čísel a, b, c rovnaké absolútne hodnoty. [Doplňujúca úloha k 66MO-A-I-3]

Úloha 7. Volejbalového turnaja sa zúčastnilo šesť družstiev, každé hralo proti každému práve raz. V jednotlivých piatich kolách prebiehali v tom istom čase vždy zápasy na troch kurtoch 1, 2 a 3. Koľko bolo možností pre rozpis takého turnaja? Rozpisom rozumieme tabuľku 3×5 , v ktorej pre $i \in \{1, 2, 3\}$ a $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je na pozícii (i, j) uvedená dvojica družstiev (bez určeného poradia), ktoré hrali proti sebe v j -tom kole na kurte číslo i . [MO63-A-II-4]