

Úlohy pred krasjkým kolom MO

Jozef Rajník

1. (MO58-C-II-1) Uvažujme výraz

$$V(x) = \frac{5x^4 - 4x^2 + 5}{x^4 + 1}.$$

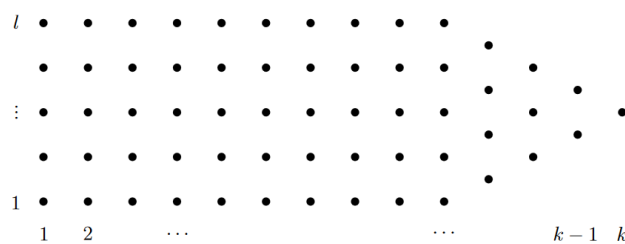
- a) Dokážte, že pre každé reálne číslo x platí $V(x) \geq 3$.
b) Nájdite najväčšiu hodnotu $V(x)$.

2. (MO58-B-II-1) V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x + y &= 1, \\ x - y &= a, \\ -4ax + 4y &= z^2 + 4 \end{aligned}$$

s neznámymi x, y, z a reálnym parametrom a .

3. Daná je kružnica k so stredom S a jej tetiva AB . Na úsečke AB zvolíme ľubovoľný bod M a druhý priesečník kružnice opísanej trojuholníku AMS s kružnicou k označme C . Dokážte, že uhly MCS a MBS sú zhodné.
4. (MO58-C-II-2) V pravouhlom trojuholníku ABC označíme P päť výšky z vrcholu C na preponu AB a D, E stredy kružníc vpísaných postupne trojuholníkom APC, CPB . Dokážte, že stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC je priesečníkom výšok trojuholníka CDE .
5. (MO58-C-II-4) Pravouhlému trojuholníku ABC s preponou AB a obsahom S je opísaná kružnica. Dotyčnica k tejto kružnici v bode C pretína dotyčnice vedené bodmi A a B v bodoch D a E . Vyjadrite dĺžku úsečky DE pomocou dĺžky c prepony a obsahu S .
6. (MO58-B-II-3) Je daný ostrouhlý trojuholník ABC , ktorý nie je rovnoramenný. Označme K priesečník osi uhla ACB s osou strany AB . Priamka CK pretína výšky z vrcholov A, B v bodoch, ktoré označíme postupne P a Q . Predpokladajme, že trojuholníky AKP a BKQ majú rovnaký obsah. Určte veľkosť uhla ACB .
7. (MO58-C-II-3) Z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ je vybratých niekoľko rôznych čísel tak, že súčet žiadnych troch z nich nie je násobkom deviatich.
- a) Dokážte, že medzi vybranými číslami sú najviac štyri deliteľné tromi.
b) Ukážte, že vybraných čísel môže byť 26.
8. Ceruzkový obrázok čísel k a l je takýto obrázok.



(KMS2014/15, 1. zimná séria, 5. príklad) Označme $CO(k, l)$ počet bodiek v ceruzkovom obrázku čísel k a l , napríklad $CO(14, 5) = 60$. Nech n je prirodzené číslo, potom ceruzkový pár čísla n je taký pár prirodzených čísel k, l , kde $k > l > 1$, že $n = CO(k, l)$.

- a) Koľko ceruzkových párov existuje pre čísla 2, 8 a 15?
b) Koľko ceruzkových párov existuje pre číslo 2014?

9. (MO55-C-II-4) Nájdite všetky dvojice prvočísel p, q , pre ktoré platí

$$p + q^2 = q + 145p^2.$$