

Úloha 1. *Prebieha online hlasovanie medzi variantmi A a B. Predtým, ako Pavol hlasoval, bol počet percent hlasov za variant A rovný kladnému celému číslu. Pavlovým hlasom sa toto číslo zvýšilo presne o 1. Dokážte, že pred Pavlovým hlasom mal variant A 18 hlasov.*

Nesprávne riešenie. Predtým, ako Pavol hlasoval, označme n počet hlasujúcich a a počet hlasov za možnosť A. Pomer hlasov za možnosť A je a/n . Po Pavlovom hlase sa tento pomer zmení na $(a+1)/(n+1)$. Táto zmena má byť rovná nárastu o 1 %, čiže o $1/100$. Dostávame tak rovnicu

$$\frac{a+1}{n+1} - \frac{a}{n} = \frac{1}{100}.$$

Pred Pavlovým hlasovaním mal variant A 18 hlasov, preto dosadíme $a = 18$ a ekvivalentnými úpravami riešime rovnicu

$$\begin{aligned}\frac{19}{n+1} - \frac{18}{n} &= \frac{1}{100}, \\ \frac{19n - 18(n+1)}{n(n+1)} &= \frac{1}{100}, \\ (19n - 18n - 18) \cdot 100 &= n(n+1), \\ 100n - 1800 &= n^2 + n, \\ 0 &= n^2 - 99n + 1800, \\ 0 &= (n-24)(n-75).\end{aligned}$$

Teda celkový počet hlasov pred Pavlovým hlasom mohol byť 24 alebo 75 hlasov. Obe hodnoty overíme:

$n =$	pred Pavlom	po Pavlovi	nárast o
24	$\frac{18}{24} = 75 \%$	$\frac{19}{25} = 76 \%$	1 %
75	$\frac{18}{75} = 24 \%$	$\frac{19}{76} = 25 \%$	1 %

Overenie sedí, čím je náš dôkaz dokončený. □

Úloha 2. *Prebieha online hlasovanie medzi variantmi A a B. Predtým, ako Pavol hlasoval, bol počet percent hlasov za variant A rovný kladnému celému číslu. Po pridaní dvoch Pavlových hlasov za variant A sa toto číslo zvýšilo presne o 1. Dokážte, že pred Pavlovým hlasovaním mal variant A 49 hlasov.*

Nesprávne riešenie. Predtým, ako Pavol hlasoval, označme n počet hlasujúcich a a počet hlasov za možnosť A. Pomer hlasov za možnosť A je a/n . Po Pavlových hlasoch sa tento pomer zmení na $(a+2)/(n+2)$. Táto zmena má byť rovná nárastu o 1 %, čiže o $1/100$. Dostávame tak rovnicu

$$\frac{a+2}{n+2} - \frac{a}{n} = \frac{1}{100}.$$

Pred Pavlovým hlasovaním mal variant A 49 hlasov, preto dosadíme $a = 49$ a ekvivalentnými úpravami riešime rovnicu

$$\begin{aligned}\frac{51}{n+2} - \frac{49}{n} &= \frac{1}{100}, \\ \frac{51n - 49(n+2)}{n(n+2)} &= \frac{1}{100}, \\ (51n - 49n - 98) \cdot 100 &= n(n+2), \\ 200n - 9800 &= n^2 + 2n, \\ 0 &= n^2 - 198n + 9800, \\ 0 &= (n-98)(n-100).\end{aligned}$$

Teda celkový počet hlasov pred Pavlovým hlasom mohol byť 98 alebo 100 hlasov. Obe hodnoty overíme:

$n =$	pred Pavlom	po Pavlovi	nárast o
98	$\frac{49}{98} = 50 \%$	$\frac{51}{100} = 51 \%$	1 %
100	$\frac{49}{100} = 49 \%$	$\frac{51}{102} = 50 \%$	1 %

Overenie sedí, čím je náš dôkaz dokončený. □

Toto riešenie je nesprávne, nakoľko v tejto situácii mohol mať variant *A* aj 36, aj 37 hlasov:

	pred Pavlom	po Pavlovi	nárast o
	$\frac{36}{48} = 75 \%$	$\frac{38}{50} = 76 \%$	1 %
	$\frac{37}{50} = 74 \%$	$\frac{39}{52} = 75 \%$	1 %

Úloha 3. Koľko najviac jazdcov možno umiestniť na šachovnicu 8×8 tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Nesprávne riešenie. Jazdec na bielom políčku ohrozuje iba čierne políčka. Bielych políčok je 32. Preto ak umiestnime 32 jazdcov na všetky biele políčka, tak ohrozené sú len čierne, teda žiaden iný jazdec nie je neohrozený. Zároveň, ľahko skontrolujeme, že všetky čierne políčka sú ohrozené, takže nevieme už pridať 33. jazdca. Teda najväčší počet jazdcov je 32. □

Úloha 4. 1 Koľko najviac jazdcov možno umiestniť na šachovnicu 8×8 tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Nesprávne riešenie. Jazdec na bielom políčku ohrozuje iba čierne políčka. Bielych políčok je 32. Preto ak umiestnime 32 jazdcov na všetky biele políčka, tak ohrozené sú len čierne, teda žiaden iný jazdec nie je neohrozený. Čo ak by sme umiestnili 33 jazdcov? Máme 33 jazdcov, ale len 32 bielych a 32 čiernych políčok. Preto musia existovať dvaja jazdci na políčkach rôznych farieb a títo dvaja jazdci sa budú ohrozovať. Teda umiestniť viac ako 32 jazdcov nie je možné. Teda najväčší počet jazdcov je 32. □

Úloha 5. 2 Koľko najviac strelcov možno umiestniť na šachovnicu 8×8 tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Nesprávne riešenie. Pre každé políčko si napíšme, o koľko políčok prideme, keď naň umiestnime strelca. Keďže chceme umiestniť čo najviac strelcov, tak ich chceme umiestňovať na políčka s čo najmenšími číslami. Najmenšie čísla sú po obvode šachovnice – čísla 8. Preto začneme umiestňovať strelcov tam. Začneme prvým riadkom, keďže tam sa strelci neohrozujú. Potom nám ostane ešte 6 neohrozených políčok v poslednom riadku. Na všetky z nich tiež vieme umiestniť strelcov. Tak sme dostali $8 + 6 = 14$ strelcov. Keďže sme ich dávali na políčka, ktoré ohrozovali najmenej políčok, tak ide o najväčší počet, ktorý sa dá umiestniť. □

8	8	8	8	8	8	8	8
8	10	10	10	10	10	10	8
8	10	12	12	12	12	10	8
8	10	12	14	14	12	10	8
8	10	12	14	14	12	10	8
8	10	12	12	12	12	10	8
8	10	10	10	10	10	10	8
8	8	8	8	8	8	8	8

K rovnakému výsledku by sme prišli aj ak by sme umiestnili strelca na políčko s najmenším číslom a potom všetky čísla upravili na počet ešte neohrozených políčok, o ktoré prideme, keď tam umiestnime strelca. Tento proces budeme opakovať až kým sa nebude dať umiestniť ďalší strelce.

Úloha 6. 3 Žiak si známku z poslednej päťminutovky zlepšil celkový priemer známok z 2,6 na 2,5. Koľko päťminutoviek celkom písal? Určte všetky možnosti. (Možné známky sú 1, 2, 3, 4, 5.)

Nesprávne riešenie. Označme p počet známok a s ich súčet. Posledná známka mohla byť len 1 alebo 2, inak by sa priemer zhoršil.

Ak bola posledná 1-ka, tak

$$\frac{s}{p} = 2,6 = \frac{13}{5}, \quad \frac{s+1}{p+1} = 2,5 = \frac{5}{2},$$

čiže

$$5s = 13p, \quad 2s = 5p + 3.$$

Od dvojnásobku prvej rovnice odpočítame päťnásobok druhej: $0 = 26p - 25p - 15$, čiže $p = 15$. Žiak teda mohol celkom napísať $15 + 1 = 16$ písomiek.

Ak bola posledná známka dvojka, tak analogicky máme rovnice

$$\frac{s}{p} = 2,6 = \frac{13}{5}, \quad \frac{s+2}{p+1} = 2,5 = \frac{5}{2},$$

z čoho dostaneme riešenie $p = 5$, teda 6 písomiek.

Žiak teda mohol celkovo napísať 6 alebo 16 písomiek. □

Úloha 7. 4 Kladné reálne čísla x, y, z splňajú nerovnosti $xy \geq 2, xz \geq 3, yz \geq 6$. Akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať výraz $13x^2 + 10y^2 + 5z^2$?

Nesprávne riešenie. Keďže chceme nájsť čo najmenšiu hodnotu výrazu $13x^2 + 10y^2 + 5z^2$, tak aj premenné x, y, z musia byť čo najmenšie. Tie sú však viazané nerovnosťami $xy \geq 2, xz \geq 3, yz \geq 6$. Aby boli čo najmenšie, tak vo všetkých nerovnostiach musia nastať rovnosti. Teda musí platiť $xy = 2, xz = 3, yz = 6$. Túto sústavu vyriešime: vyjadríme $y = 2/x, z = 3/x$ a dosadíme do $yz = 2 \cdot 3/x^2 = 6$, z čoho nám vyjde $x^2 = 1$, čiže $x = 1$, keďže x je kladné. Spätným dosadením máme $y = 2$ a $z = 3$. Čiže najmenšia hodnota výrazu je $13 \cdot 1^2 + 10 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 = 98$. □

Úloha 8. 5 Súčet 74 (nie nutne rôznych) reálnych čísel z uzavretého intervalu $[4, 10]$ je 356. Určte najväčšiu možnú hodnotu súčtu ich druhých mocnín.

Nesprávne riešenie. Keďže chceme dostať čo najväčší súčet druhých mocnín a druhé mocniny rastú tým viac, čím väčšie čísla mocníme, tak chceme mať čo najviac 10-tok. Aby sme dostali čo najviac 10-tok, tak musíme mať zvyšné čísla čo najmenšie, teda samé štvorky. Ak si označíme počet 10-tok ako x , tak počet 4-iek je $74 - x$. Potom máme súčet

$$10x + (74 - x)4 = 356,$$

z čoho dostaneme $x = 10$. Teda máme 10 desiatok a 64 štvoriek, čo nám dáva najväčšiu možnú hodnotu súčtu druhých mocnín $10 \cdot 10^2 + 64 \cdot 4^2$. □

Úloha 9. 5 Súčet 74 (nie nutne rôznych) reálnych čísel z uzavretého intervalu $[4, 10]$ je 356. Určte najväčšiu možnú hodnotu súčtu ich druhých mocnín.

Nesprávne riešenie. Keďže chceme dostať čo najväčší súčet druhých mocnín a druhé mocniny rastú tým viac, čím väčšie čísla mocníme, tak chceme mať čo najviac 10-tok. Aby sme dostali čo najviac 10-tok, tak musíme mať zvyšné čísla čo najmenšie, teda samé štvorky. Ak si označíme počet 10-tok ako x , tak počet 4-iek je $74 - x$. Potom máme súčet

$$10x + (74 - x)4 = 356,$$

z čoho dostaneme $x = 10$. Teda máme 10 desiatok a 64 štvoriek, čo nám dáva najväčšiu možnú hodnotu súčtu druhých mocnín $10 \cdot 10^2 + 64 \cdot 4^2$.

Ak by sme chceli dostať väčšiu hodnotu, tak by sme museli nejakú hodnotu zväčšiť. Keďže desiatky zväčšovať nemôžeme, tak musíme zväčšiť štvorku, napr. na hodnotu $4 + x$. Ale našich 74 čísel má

rovnaký súčet. Pre zachovanie tohto súčtu musíme teda nejaké číslo 10 znížiť. Potom miesto $4^2 + 10^2$ budeme mať $(4+x)^2 + (10-x)^2$, ale platí:

$$(4+x)^2 + (10-x)^2 < 4^2 + 10^2, \quad (1)$$

$$4^2 + 8x + x^2 + 10^2 - 20x + x^2 < 4^2 + 10^2, \quad (2)$$

$$2x^2 - 12x < 0, \quad (3)$$

$$2x(x-6) < 0. \quad (4)$$

$$(5)$$

A to platí, keďže $0 < x < 6$, lebo pre $x \geq 6$ by sme touto zmenou len vymenili čísla 4 a 10 alebo by sme ich dostali mimo interval $[4, 10]$. $\square$

Úloha 10. 5 Súčet 74 (nie nutne rôznych) reálnych čísel z uzavretého intervalu $[4, 10]$ je 356. Určte najväčšiu možnú hodnotu súčtu ich druhých mocnín.

Nesprávne riešenie. Nech sa táto najväčšia možná hodnota nadobúda pre čísla $a_1, a_2, \dots, a_{74}$.

Ukážeme, že najviac jedno z čísel $a_1, a_2, \dots, a_{74}$ je rôzne od 4 a 10. Pre spor predpokladajme, že máme také dve čísla. Označme si ich a_i, a_j tak, aby platilo $4 < a_i < a_j < 10$. Potom pre $x > 0$ platí

$$\begin{aligned} 2(a_j - a_i)x + 2x^2 &> 0, \\ -2a_ix + x^2 + 2a_jx + x^2 &> 0, \\ a_i^2 - 2a_ix + x^2 + a_j^2 + 2a_jx + x^2 &> a_i^2 + a_j^2, \\ (a_i - x)^2 + (a_j + x)^2 &> a_i^2 + a_j^2. \end{aligned}$$

Pritom hodnotu x vieme zvoliť dostatočne malú tak, aby obe z čísel $a_i - x$ a $a_j + x$ boli z intervalu $[4, 10]$. Teda nahradením čísel a_i, a_j za čísla $a_i - x, a_j + x$ zvýši hodnotu skúmaného výrazu. To je v spore s tým, že šlo o maximálnu hodnotu.

Nech medzi číslami $a_1, a_2, \dots, a_{47}$ je a -krát číslo 4. Potom medzi nimi máme $(73 - a)$ -krát číslo 10 a jeden krát nejaké číslo $x \in (4, 10]$ (nemôže ísť o číslo 4, lebo tie sme označili všetky, ale číslo 10 to stále môže byť). Musí platiť

$$4a + (73 - a) \cdot 10 + x = 356, \quad \text{teda} \quad x = 6a - 374.$$

Keďže číslo $6a - 374$ dáva zvyšok 4 po delení šiestimi, tak jediná možná hodnota čísla x je 10, a teda $a = 64$. Tak sme dostali jedinú možnú 47-micu pozostávajúcu z 64 štvoriek a 10 desiatok. To dáva maximálnu hodnotu 2024.

□