

Hľadanie chýb v riešeníach

Jozef Rajník, Letná škola matematiky, 14. 7. 2025

Úloha 1. Študent má priemer 3,46. Po získaní ďalších dvoch známok mu stúpol priemer na 3,5. Koľko známok študent celkovo dostal? Nájdite všetky možnosti.

Pokus o riešenie. Označme n konečný počet známok, s ich súčet a x súčet dvoch známok, ktoré študent získal ako posledné. Podmienky na priemery zo zadania vieme pomocou týchto premenných vyjadriť ako

$$\frac{s}{n} = 3,5; \quad \frac{s-x}{n-2} = 3,46.$$

Z prvej rovnice si vyjadríme $s = 3,5n$. Druhú rovnicu upravíme na $s - x = 3,46n - 6,92$ a dosadíme do nej vyjadrenie s :

$$\begin{aligned} 3,5n - x &= 3,46n - 6,92, \\ 0,04n &= x - 6,92, \\ n &= 25x - 173. \end{aligned}$$

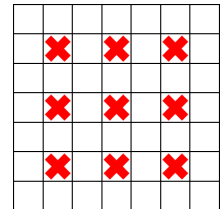
Keď mal študent priemer 3,46, tak musel mať aspoň jednu známku, čiže musí platiť $n - 2 \geq 1$, teda $n \geq 3$. Z toho dostaneme $25x - 173 \geq 3$, čo platí práve pre $25x \geq 176 \Leftrightarrow x \geq 8$. A keďže $x \leq 10$, nakoľko ide o súčet dvoch známok, tak jediné možné hodnoty pre x sú 8, 9 a 10. Po dosadení do $n = 25x - 173$ dostaneme, že všetky možné hodnoty pre n sú 27, 52 a 77. Študent teda mohol celkovo dostať 27, 52 alebo 77 známok. $\square$

Úloha 2. Kladné reálne čísla x, y, z spĺňajú nerovnosti $xy \geq 2, xz \geq 3, yz \geq 6$. Akú najmenšiu hodnotu môže nadobúdať výraz $13x^2 + 10y^2 + 5z^2$?

Pokus o riešenie. Keďže chceme nájsť čo najmenšiu hodnotu výrazu $13x^2 + 10y^2 + 5z^2$, tak aj premenné x, y, z musia byť čo najmenšie. Tie sú však viazané nerovnosťami $xy \geq 2, xz \geq 3, yz \geq 6$. Aby boli čo najmenšie, tak vo všetkých nerovnostiach musia nastať rovnosti. Teda musí platiť $xy = 2, xz = 3, yz = 6$. Túto sústavu vyriešime: vyjadríme $y = 2/x, z = 3/x$ a dosadíme do $yz = 2 \cdot 3/x^2 = 6$, z čoho nám vyjde $x^2 = 1$, čiže $x = 1$, keďže x je kladné. Spätným dosadením máme $y = 2$ a $z = 3$. Čiže najmenšia hodnota výrazu je $13 \cdot 1^2 + 10 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3^2 = 98$. $\square$

Úloha 3. Na pláne 7×7 ukrytá loď 2×3 . Na koľko najmenej políček musíme vystreliť, aby sme ju s istotou aspoň raz zasiahli?

Pokus o riešenie 1. Neoplatí sa nám strieľať na kraj, keďže v strede pokryjeme viac pozícií lode. Tiež sa nám neoplatí sa nám dávať výstrely vedľa seba, lebo keď sú ďalej od seba, tak pokrývajú viac možných pozícií lode. Avšak nechceme strieľať s medzerou dvoch políček, lebo môže byť medzi nimi loď. Optimálne je preto strieľať s rozstupom jedného políčka. Najmenej výstrelov je preto 9, ako je vyznačené na obrázku. Výstreli sú rozmiestnené rovnomerne podľa pravidiel, ktoré sme ukázali. Ak by sme použili o jeden výstrel menej, tak už by sme niekde vedeli umiestniť loď. $\square$



Pokus o riešenie 2. Pre každé políčko spočítame počet pozícií lodí, ktoré by sme trafili výstrelom naň (tabuľka vľavo). Aby sme dosiahli čo najmenej výstrelov, tak musíme streliť na políčko, kde zasiahneme čo najviac možných lodí – teda 12. Takých políček je viac, no keď vyberieme stredné, tak tým pokryjeme všetky dvanástky. Preto začneme stredom.

2	4	5	5	5	4	2
4	8	10	10	10	8	4
5	10	12	12	12	10	5
5	10	12	12	12	10	5
5	10	12	12	12	10	5
4	8	10	10	10	8	4
2	4	5	5	5	4	2

2	4	5	5	5	4	2
4	8	9	8	9	8	4
5	9	8	3	8	9	5
5	8	3	X	3	8	5
5	9	8	3	8	9	5
4	8	9	8	9	8	4
2	4	5	5	5	4	2

		X		X		
	X				X	
			X			
	X				X	
		X		X		

Potom si znovu prepočítame počet lodí, ktoré zasiahneme na jednotlivých políčkach (tabuľka v strede). Najviac vieme pokryť 9 pozícií lodí, a to na ôsmich políčkach. Dokonca tieto políčka sú rozmiestnené rovnomerne okolo stredu. Ak vystrelíme na všetky z nich (tabuľka vpravo), tak tým pokryjeme všetky možné pozície lode. Keďže sme vždy vyberali políčka, ktoré pokrývajú najväčší možný počet pozícií lode, tak tento počet je najmenší možný. $\square$

Úloha 4. *Prebieha online hlasovanie medzi variantmi A a B. Predtým, ako Pavol hlasoval, bol počet percent hlasov za variant A rovný kladnému celému číslu. Pavlovým hlasom sa toto číslo zvýčilo presne o 1. Dokážte, že pred Pavlovým hlasom mal variant A 18 hlasov.*

Pokus o riešenie. Predtým, ako Pavol hlasoval, označme n počet hlasujúcich a a počet hlasov za možnosť A. Pomer hlasov za možnosť A je a/n . Po Pavlovom hlase sa tento pomer zmení na $(a+1)/(n+1)$. Táto zmena má byť rovná nárastu o 1 %, čiže o $1/100$. Dostávame tak rovnicu

$$\frac{a+1}{n+1} - \frac{a}{n} = \frac{1}{100}.$$

Pred Pavlovým hlasovaním mal variant A 18 hlasov, preto dosadíme $a = 18$ a ekvivalentnými úpravami riešime rovnicu

$$\begin{aligned}\frac{19}{n+1} - \frac{18}{n} &= \frac{1}{100}, \\ \frac{19n - 18(n+1)}{n(n+1)} &= \frac{1}{100}, \\ (19n - 18n - 18) \cdot 100 &= n(n+1), \\ 100n - 1800 &= n^2 + n, \\ 0 &= n^2 - 99n + 1800, \\ 0 &= (n-24)(n-75).\end{aligned}$$

Teda celkový počet hlasov pred Pavlovým hlasom mohol byť 24 alebo 75 hlasov. Obe hodnoty overíme:

$n =$	pred Pavlom	po Pavlovi	nárast o
24	$\frac{18}{24} = 75 \%$	$\frac{19}{25} = 76 \%$	1 %
75	$\frac{18}{75} = 24 \%$	$\frac{19}{76} = 25 \%$	1 %

Overenie sedí, čím je náš dôkaz dokončený. □

Úloha 5. *Koľko existuje všetkých 6-ciferných čísel, ktoré neobsahujú cifru 0 a zároveň obsahujú aspoň jednu cifru 1?*

Pokus o riešenie. Keďže čísla nemajú obsahovať 0, tak nám ostáva 9 cifier, z ktorých môžeme čísla skladat'. Niekde musíme mať jednotku – pre jej pozíciu máme 7 možností, kde môže byť. Potom nám ostane 6 pozícií, na ktoré môžeme už dávať ľubovoľné z 9 cifier. Teda celkovo na tieto pozície máme 9^6 možností (pravidlo súčinu). To ešte vynásobíme možnosťami pre pozíciu jednotky, čo nám dá celkový počet $7 \cdot 9^6$ hľadaných čísel. □

Úloha 6. *Na večierku sa zišlo n ľudí, z ktorých každý pozná aspoň 3 iných ľudí z večierka (známosti sú vzájomné). Dokážte, že v každej takejto situácii možno vybrať štyroch ľudí a posadiť ich okolo okrúhleho stola tak, aby každý z nich sedel medzi dvomi známymi.*

Pokus o riešenie. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou podľa n . Keď si vyberieme jedného hosťa, tak pozná ešte troch ostatných. Teda na večierku musia byť aspoň 4 ľudia.

Báza. Pre $n = 4$ musí každý človek poznať všetkých troch ostatných. Teda môžeme ich hocijako posadiť okolo okrúhleho stola a tým splníme zadanie.

Indukčný krok. Predpokladajme teraz, že tvrdenie platí pre nejaké n (IP) a dokážeme, že platí aj pre $n+1$. Uvažujme večierok s n ľuďmi, kde každý pozná aspoň 3 ostatných. Podľa indukčného predpokladu v ňom vieme posadiť 4 ľudí okolo okrúhleho stola. Ak na večierok pridáme ešte jedného hosťa, tak dostaneme $n+1$ ľudí. Stále každý pozná aspoň 3 ostatných a stále na ňom vieme nájsť 4 ľudí, ktorých možno posadiť okolo okrúhleho stola – tých, čo pred tým. Tvrdenie teda platí aj pre $n+1$, čím je dôkaz indukciou hotový. □

Ďalšie úlohy nie sú vytlačené, ale viete ich nájsť na stránke letnej školy pre prípad potreby.

Úloha 7. *Koľko najviac jazdcov možno umiestniť na šachovnicu 8×8 tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?*

Pokus o riešenie 1. Jazdec na bielom políčku ohrozuje iba čierne políčka. Bielych políčok je 32. Preto ak umiestnime 32 jazdcov na všetky biele políčka, tak ohrozené sú len čierne, teda žiaden iný jazdec nie je neohrozený. Zároveň, ľahko skontrolujeme, že všetky čierne políčka sú ohrozené, takže nevieme už pridať 33. jazdca. Teda najväčší počet jazdcov je 32. $\square$

Pokus o riešenie 2. Jazdec na bielom políčku ohrozuje iba čierne políčka. Bielych políčok je 32. Preto ak umiestnime 32 jazdcov na všetky biele políčka, tak ohrozené sú len čierne, teda žiaden iný jazdec nie je neohrozený. Čo ak by sme umiestnili 33 jazdcov? Máme 33 jazdcov, ale len 32 bielych a 32 čiernych políčok. Preto musia existovať dvaja jazdci na políčkach rôznych farieb a títo dvaja jazdci sa budú ohrozovať. Teda umiestniť viac ako 32 jazdcov nie je možné. Teda najväčší počet jazdcov je 32. $\square$

Úloha 8. *Súčet 74 (nie nutne rôznych) reálnych čísel z uzavretého intervalu $[4, 10]$ je 356. Určte najväčšiu možnú hodnotu súčtu ich druhých mocnín.*

Pokus o riešenie 1. Keďže chceme dostať čo najväčší súčet druhých mocnín a druhé mocniny rastú tým viac, čím väčšie čísla mocníme, tak chceme mať čo najviac 10-tok. Aby sme dostali čo najviac 10-tok, tak musíme mať zvyšné čísla čo najmenšie, teda samé štvorky. Ak si označíme počet 10-tok ako x , tak počet 4-iek je $74 - x$. Potom máme súčet

$$10x + (74 - x)4 = 356,$$

z čoho dostaneme $x = 10$. Teda máme 10 desiatok a 64 štvoriek, čo nám dáva najväčšiu možnú hodnotu súčtu druhých mocnín $10 \cdot 10^2 + 64 \cdot 4^2$. $\square$

Pokus o riešenie 2. Keďže chceme dostať čo najväčší súčet druhých mocnín a druhé mocniny rastú tým viac, čím väčšie čísla mocníme, tak chceme mať čo najviac 10-tok. Aby sme dostali čo najviac 10-tok, tak musíme mať zvyšné čísla čo najmenšie, teda samé štvorky. Ak si označíme počet 10-tok ako x , tak počet 4-iek je $74 - x$. Potom máme súčet

$$10x + (74 - x)4 = 356,$$

z čoho dostaneme $x = 10$. Teda máme 10 desiatok a 64 štvoriek, čo nám dáva najväčšiu možnú hodnotu súčtu druhých mocnín $10 \cdot 10^2 + 64 \cdot 4^2$.

Ak by sme chceli dostať väčšiu hodnotu, tak by sme museli nejakú hodnotu zväčšiť. Keďže desiatky zväčšovať nemôžeme, tak musíme zväčšiť štvorku, napr. na hodnotu $4 + x$. Ale našich 74 čísel má rovnaký súčet. Pre zachovanie tohto súčtu musíme teda nejaké číslo 10 znížiť. Potom miesto $4^2 + 10^2$ budeme mať $(4+x)^2 + (10-x)^2$, ale platí:

$$\begin{aligned}(4+x)^2 + (10-x)^2 &< 4^2 + 10^2, \\ 4^2 + 8x + x^2 + 10^2 - 20x + x^2 &< 4^2 + 10^2, \\ 2x^2 - 12x &< 0, \\ 2x(x-6) &< 0.\end{aligned}$$

A to platí, keďže $0 < x < 6$, lebo pre $x \geq 6$ by sme touto zmenou len vymenili čísla 4 a 10 alebo by sme ich dostali mimo interval $[4, 10]$. $\square$

Pokus o riešenie 3. Nech sa táto najväčšia možná hodnota nadobúda pre čísla $a_1, a_2, \dots, a_{74}$.

Ukážeme, že najviac jedno z čísel $a_1, a_2, \dots, a_{74}$ je rôzne od 4 a 10. Pre spor predpokladajme, že máme také dve čísla. Označme si ich a_i, a_j tak, aby platilo $4 < a_i < a_j < 10$. Potom pre $x > 0$ platí

$$\begin{aligned}2(a_j - a_i)x + 2x^2 &> 0, \\ -2a_ix + x^2 + 2a_jx + x^2 &> 0, \\ a_i^2 - 2a_ix + x^2 + a_j^2 + 2a_jx + x^2 &> a_i^2 + a_j^2, \\ (a_i - x)^2 + (a_j + x)^2 &> a_i^2 + a_j^2.\end{aligned}$$

Pritom hodnotu x vieme zvoliť dostatočne malú tak, aby obe z čísel $a_i - x$ a $a_j + x$ boli z intervalu $[4, 10]$. Teda nahradením čísel a_i, a_j za čísla $a_i - x, a_j + x$ zvýši hodnotu skúmaného výrazu. To je v spore s tým, že šlo o maximálnu hodnotu.

Nech medzi číslami $a_1, a_2, \dots, a_{74}$ je a -krát číslo 4. Potom medzi nimi máme $(73 - a)$ -krát číslo 10 a jedenkrát nejaké číslo $x \in (4, 10]$ (nemôže ísť o číslo 4, lebo tie sme označili všetky, ale číslo 10 to stále môže byť). Musí platiť

$$4a + (73 - a) \cdot 10 + x = 356, \quad \text{teda} \quad x = 6a - 374.$$

Keďže číslo $6a - 374$ dáva zvyšok 4 po delení šiestimi, tak jediná možná hodnota čísla x je 10, a teda $a = 64$. Tak sme dostali jediná možnú 47-micu pozostávajúcu z 64 štvoriek a 10 desiatok. To dáva maximálnu hodnotu 2024. $\square$

Úloha 9. *Prebieha online hlasovanie medzi variantmi A a B. Predtým, ako Pavol hlasoval, bol počet percent hlasov za variant A rovný kladnému celému číslu. Po pridaní dvoch Pavlových hlasov za variant A sa toto číslo zvýšilo presne o 1. Dokážte, že pred Pavlovým hlasovaním mal variant A 49 hlasov.*

Pokus o riešenie. Predtým, ako Pavol hlasoval, označme n počet hlasujúcich a a počet hlasov za možnosť A. Pomer hlasov za možnosť A je a/n . Po Pavlových hlasoch sa tento pomer zmení na $(a+2)/(n+2)$. Táto zmena má byť rovná nárastu o 1 %, čiže o $1/100$. Dostávame tak rovnicu

$$\frac{a+2}{n+2} - \frac{a}{n} = \frac{1}{100}.$$

Pred Pavlovým hlasovaním mal variant A 49 hlasov, preto dosadíme $a = 49$ a ekvivalentnými úpravami riešime rovnicu

$$\begin{aligned} \frac{51}{n+2} - \frac{49}{n} &= \frac{1}{100}, \\ \frac{51n - 49(n+2)}{n(n+2)} &= \frac{1}{100}, \\ (51n - 49n - 98) \cdot 100 &= n(n+2), \\ 200n - 9800 &= n^2 + 2n, \\ 0 &= n^2 - 198n + 9800, \\ 0 &= (n - 98)(n - 100). \end{aligned}$$

Teda celkový počet hlasov pred Pavlovým hlasom mohol byť 98 alebo 100 hlasov. Obe hodnoty overíme:

$n =$	pred Pavlom	po Pavlovi	nárast o
98	$\frac{49}{98} = 50 \%$	$\frac{51}{100} = 51 \%$	1 %
100	$\frac{49}{100} = 49 \%$	$\frac{51}{102} = 50 \%$	1 %

Overenie sedí, čím je náš dôkaz dokončený. $\square$

Úloha 10. *Koľko najviac strelcov možno umiestniť na šachovnicu 8×8 tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?*

Pokus o riešenie. Pre každé políčko si napíšme, o koľko políček prideme, keď naň umiestnime strelca.

Keďže chceme umiestniť čo najviac strelcov, tak ich chceme umiestňovať na políčka s čo najmenšími číslami. Najmenšie čísla sú po obvode šachovnice – čísla 8. Preto začneme umiestňovať strelcov tam. Začneme prvým riadkom, keďže tam sa strelci neohrozujú. Potom nám ostane ešte 6 neohrozených políček v poslednom riadku. Na všetky z nich tiež vieme umiestniť strelcov. Tak sme dostali $8+6 = 14$ strelcov. Keďže sme ich dávali na políčka, ktoré ohrozovali najmenej políček, tak ide o najväčší počet, ktorý sa dá umiestniť.

8	8	8	8	8	8	8	8
8	10	10	10	10	10	10	8
8	10	12	12	12	12	10	8
8	10	12	14	14	12	10	8
8	10	12	14	14	12	10	8
8	10	12	12	12	12	10	8
8	10	10	10	10	10	10	8
8	8	8	8	8	8	8	8

K rovnakému výsledku by sme prišli aj ak by sme umiestnili strelca na políčko s najmenším číslom a potom všetky čísla upravili na počet ešte neohrozených políček, o ktoré prideme, keď tam umiestnime strelca. Tento proces budeme opakovať až kým sa nebude dať umiestniť ďalší strelce. $\square$