

Matematická indukcia

Jozef Rajník, Náhradné sústredenie KMS, 1. – 6. 9. 2020 Rajecké Teplice

Úloha 1. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla $n \geq 2$ platí

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Úloha 2. Dokážte, že pre ľubovoľných n kladných reálnych čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ so súčinom 1 platí

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n.$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť.

Úloha 3. Dokážte, že pre ľubovoľných n kladných reálnych čísel platí

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť. Ide o tzv. nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom (skrátene AG nerovnosť).

Úloha 4 (Cauchyho-Schwarzova nerovnosť). Dokážte, že pre ľubovoľných $2n$ reálnych čísel $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ platí

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Úloha 5 (PraSe 26. ročník, 4. séria, úloha 5). Pre dané prirodzené číslo $n \geq 2$ vypíšeme všetky zlomky tvaru $\frac{1}{p \cdot q}$, kde čísla p, q sú nesúdeliteľné a navyše spĺňajú podmienky $0 < p < q \leq n$ a $p + q > n$. Dokážte, že súčet všetkých takýchto zlomkov je rovný $\frac{1}{2}$.

Úloha 6. Dokážte, že každú sumu väčšiu ako 4 centy vieme zaplatiť len pomocou dvoj- a päťcentoviek.

Úloha 7 (PraSe 26. ročník, 4. séria, úloha 3). Nech x je reálne číslo a $x + \frac{1}{x}$ je celé číslo. Dokážte, že potom aj $x^n + x^{-n}$ je celé číslo pre všetky prirodzené čísla n .

Úloha 8 (KMS 15/16, 1. zimná séria, úloha 7). Zajo je krásny a preto si aj svoj plot chce natrieť krásne. Krásny plot musí spĺňať nasledujúce pravidlá:

- žiadne dve susedné latky nemajú rovnakú farbu,
- nevieme z plotu vybrať štyri latky (nie nutne susedné) bez zmeny ich poradia tak, aby boli natreté v poradí X, Y, X, Y , pre žiadne dve rôzne farby X, Y .

Koľko najviac latiek môže mať Zajov plot, ak nechce použiť viac ako n rôznych farieb?

Úloha 9 (KMS 06/07, 1. zimná séria, úloha 11). Na ostrove žije n domorodcov. Jedného dňa náčelník rozhodol, že všetci (vrátane neho) si urobia a budú nosiť náhrdelník zložený z 0 alebo viac jednofarebných kamienkov. Dvaja domorodci majú mať aspoň jeden kamienok rovnakej farby práve vtedy, keď sú priatelia.

a) Dokážte, že domorodci môžu splniť náčelníkov rozkaz.

b) Aký je minimálny počet farieb kamienkov potrebný na to, aby sa dal splniť náčelníkov rozkaz bez ohľadu na priateľské vzťahy na ostrove?

Úloha 10 (PraSe, 2. ročník, 2. série - 4). Nech x , y a z sú rôzne celé čísla a n prirodzené číslo. Dokážte, že potom

$$\frac{x^n}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^n}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^n}{(z-x)(z-y)}$$

je celé číslo.

Úloha 11 (PraSe 19. ročník, 2. série, 7. úloha). Majme dve postupnosti prirodzených čísel $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, kde $m, n \in \mathbb{N}$. Dokážte, že $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n)$ práve vtedy, keď existuje taká postupnosť $t = (t_1, \dots, t_k)$, že x je n/k -krát zopakovaná postupnosť t a y je m/k -krát zopakovaná postupnosť t .

Úloha 12 (KMS 2002/3-L1-11). Nech S je podmnožina $2n$ mrežových bodov vo štvorci $n \times n$ mrežových bodov. Každé dva body (ktoré môžu byť) sú spojené vodorovnou alebo zvislou čiarou (rovnobežnou so stranami obdĺžnika). Dokážte, že sa tam musí nachádzať uzavretá lomená čiara z tých spojnic.

Úloha 13. *Letecká sieť m miest* pozostáva z m miest, medzi ktorými zabezpečujú leteckú prepravu dve spoločnosti a medzi každými dvoma mestami lieta priama linka práve jednej spoločnosti. Nazvime *kliku* miest takú skupinu miest, že medzi každými dvoma mestami lieta tá istá spoločnosť. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo l existuje prirodzené číslo $R(l)$ (nazýva sa Rameseyovo číslo) také, že pre každé $m \geq R(l)$ v každej leteckej sieti m miest možno nájsť *kliku* obsahujúcu l miest.

Úloha 14 (PraSe 26. ročník, 4. série, úloha 7). Nech X je množina obsahujúca $\binom{2k-4}{k-2} + 1$ reálnych čísiel, $k \geq 2$. Dokážte, že existuje rastúca alebo klesajúca postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^k$ čísiel z C taká že pre všetky $i \in \{2, \dots, k-1\}$ platí

$$|x_{i+1} - x_1| \geq 2|x_i - x_1|.$$

Úloha 15 (PraSe 26. ročník, 4. série, úloha 4). Dokážte, že medzi ľubovoľnými 201 rôznymi celými číslami v absolútnej hodnote menšími než 199 sa vždy nájdu tri, ktorých súčet je nula.