

Matematická indukcia

Jozef Rajník, KMS letné sústreďenie 2016, Vyšná Slaná

Matematickou indukciou dokazujeme tvrdenia typu: Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla $n \geq a$ platí tvrdenie $V(n)$. Dôkaz má dve časti:

1° Dokážeme, že platí $V(a)$ (báza indukcie).

2° Dokážeme, že pre všetky prirodzené $k \geq a$ platí $V(k) \Rightarrow V(k+1)$ (indukčný krok).

Úloha 1. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí

a) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

b) $5 \mid n^5 - n$,

c) $p \mid n^p - n$, kde p je ľubovoľné prvočíslo (Malá Fermatova veta),

d) $\frac{1}{n} + \frac{3}{n} + \frac{5}{n} + \dots + \frac{2n-1}{n} = n$,

e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$,

f) $31 \mid 5^{n+1} + 6^{2n-1}$,

g) $1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1)2^n + 1$.

Úloha 2. V rovine je rozmiestnených n kružníc, z ktorých každá pretína všetky ostatné. Dokážte, že oblasti roviny, ktoré tieto kružnice vyčleňujú, možno ofarbiť dvoma farbami tak, aby žiadne dve susedné oblasti nemali rovnakú farbu.

Úloha 3. Daných je n priamok v rovine. Najviac na koľko oblastí môžu tieto priamky rozdeliť rovinu?

Úloha 4. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platia nerovnosti

a) $n! > 2^n$ (zistite, pre ktoré n nerovnosť platí),

b) $(1+x)^n \geq 1+nx$, kde $x \in (-1, \infty)$ (Bernoulliho nerovnosť),

c) $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n$,

d) $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \dots + \sqrt{n} < \frac{1}{4}n^2$,

e) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$,

f) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{5 \cdot 6} < 1$,

g) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$.

Keď chceme dokázať platnosť $V(k+1)$, niekedy nám nestačí predpoklad, že platí len $V(k)$. Rozmyslite si, že pri indukcii môžeme predpokladať, že platia všetky $V(1), V(2), \dots, V(k)$.

Úloha 5. Dokážte, že každú sumu väčšiu ako 4 centy vieme zaplatiť len pomocou dvoj- a päťcentoviek.

Úloha 6. Dokážte, že pre ľubovoľných n kladných reálnych čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ so súčinom 1 platí

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n.$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť.

Úloha 7. Dokážte, že pre ľubovoľných n kladných reálnych čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí nerovnosť

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Úloha 8. Dokážte, že pre ľubovoľných n kladných reálnych čísel platí

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť. Ide o tzv. nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom (skrátene AG nerovnosť).

Úloha 9. Dokážte, že pre ľubovoľných $2n$ reálnych čísel $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ platí

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Úloha 10. Nech x je reálne číslo a $x + \frac{1}{x}$ je celé číslo. Dokážte, že potom aj $x^n + x^{-n}$ je celé číslo pre všetky prirodzené čísla n . [PraSe 26. ročník, 4. séria, úloha 3]

Úloha 11. Dokážte, že medzi ľubovoľnými 201 rôznymi celými číslami v absolútnej hodnote menšími než 199 sa vždy nájdu tri, ktorých súčet je nula. [PraSe 26. ročník, 4. séria, úloha 4]

Úloha 12. Pre dané prirodzené číslo $n \geq 2$ vypíšeme všetky zlomky tvaru $\frac{1}{9^q}$, kde čísla p, q sú nesúdeliteľné a navyše spĺňajú podmienky $0 < p < q \leq n$ a $p + q > n$. Dokážte, že súčet všetkých takýchto zlomkov je rovný $\frac{1}{2}$. [PraSe 26. ročník, 4. séria, úloha 5]

Úloha 13. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n existuje číslo, ktorého dekadický zápis obsahuje len cifry 1, 2 a ktoré je deliteľné 2^n . [PraSe 26. ročník, 4. séria, úloha 6]

Úloha 14. *Letecká sieť m miest* pozostáva z m miest, medzi ktorými zabezpečujú leteckú prepravu dve spoločnosti a medzi každými dvoma mestami lieta priama linka práve jednej spoločnosti. Nazvime *kliku* miest takú skupinu miest, že medzi každými dvoma mestami lieta tá istá spoločnosť. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo l existuje prirodzené číslo $R(l)$ (nazýva sa Rameseyovo číslo) také, že pre každé $m \geq R(l)$ v každej leteckej sieti m miest možno nájsť *kliku* obsahujúcu l miest.

Úloha 15. Nech X je množina obsahujúca $\binom{2k-4}{k-2} + 1$ reálnych čísel, $k \geq 2$. Dokážte, že existuje rastúca alebo klesajúca postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^k$ čísel z C taká že pre všetky $i \in \{2, \dots, k-1\}$ platí

$$|x_{i+1} - x_1| \geq 2|x_i - x_1|.$$

[PraSe 26. ročník, 4. séria, úloha 7]

Úloha 16. Nech x, y a z sú rôzne celé čísla a n prirodzené číslo. Dokážte, že potom

$$\frac{x^n}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^n}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^n}{(z-x)(z-y)}$$

je celé číslo. [PraSe, 2. ročník, 2. séria - 4]

Úloha 17. V bani s neobmedzeným množstvom poschodí, ktoré sú zhora nadol očíslované $-1, -2, -3, \dots$, pracuje niekoľko (konečne veľa) trpaslíkov.

Úloha 18. Ivka a Baša objavili 95 kladných čísel. Ivka hneď všetkých 95 čísel sčítala a zapísala si výsledok. Baša je o niečo prefíkanejšia, preto najprv všetky čísla menšie ako 1 nahradila jednotkou, potom všetkých 95 (už nových) čísel vynásobila a k výsledku pripočítala 94. Dokážte, že Ivka nedostala väčší výsledok ako Baša. [KMS 15/16 3. zimná séria úloha 6]

Úloha 19. Nájdite najmenšie reálne číslo p také, že nerovnosť

$$\sqrt{1^2 + 1} + \sqrt{2^2 + 1} + \sqrt{3^2 + 1} + \dots + \sqrt{n^2 + 1} \leq \frac{1}{2}n(n+p)$$

platí pre každé prirodzené číslo p . [MO53-A-I-4]

Úloha 20. Medzi čísla $1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n$ doplníme znamienka plus a mínus (aj pred jednotku). Koľko rôznych súčtov vieme dostať?

Úloha 21. Dokážte, že existuje ľubovoľne dlhá konečná rastúca postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ spĺňajúca pre všetky $n \geq 1$ vzťah $a_{n+1} = 19(99 - a_n)a_n$. Existuje nekonečná rastúca postupnosť s rovnakou vlastnosťou? [PraSe 19. ročník, 2. séria, 6. úloha]

Úloha 22. Majme dve postupnosti prirodzených čísel $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, kde $m, n \in \mathbb{N}$. Dokážte, že $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = (y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n)$ práve vtedy, keď existuje taká postupnosť $t = (t_1, \dots, t_k)$, že x je n/k -krát zopakovaná postupnosť t a y je m/k -krát zopakovaná postupnosť t . [PraSe 19. ročník, 2. séria, 7. úloha]

Úloha 23. Nech $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je rastúca funkcia, ktorá pre každé prirodzené číslo n spĺňa vzťah $f(f(n)) = f(n) + n - 1$. Dokážte, že potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $f(n+1) - f(n)$ buď 1 alebo 2. [PraSe 19. ročník, 2. séria, 8. úloha]

Úloha 24. Uvažujem Fibonacciho postupnosť $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($F_1 = F_2 = 1$ a $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pre všetky $n \geq 1$). Dokážte, že pre každé prirodzené čísla s, t platí: Ak $t \mid s$, tak $F_t \mid F_s$.

Úloha 25. Dokážte, že pre n -té Fibonacciho číslo platí

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots$$

Úloha 26 (IMO2009-6).