

Cvičenie 1: Výroky

→ **Úloha 1.** Rozhodnite, ktoré tvrdenia sú výrokmi:

- Číslo 17 je prvočíslo.
- $1 + 1 = 3$
- Každé prirodzené číslo je párne.
- Dajte mi A z Úvodu do diskretných štruktúr!
- Koľko je hodín?
- V roku 2047 pristanú ľudia na Marse.
- Každé párne číslo väčšie ako 2 možno zapísať ako súčet dvoch prvočísel.
- Tento výrok je nepravdivý.
- Trenčín a Brezno sú krajské mestá Slovenska.
- Ak sú čísla $42^{47} + 13$ a 17 prvočíslami, tak číslo $42^{47} + 13$ je prvočíslo.
- Ak sa Nicolas Cage narodil v apríli, tak ak sa Nicolas Cage narodil v roku 1965, tak sa narodil v apríli.

→ **Úloha 2.** Rozhodnite, či nasledovné zložené výroky sú tautológie.

- $(a \wedge b) \Rightarrow a$
- $a \Rightarrow (a \vee b)$
- $[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)] \Rightarrow (a \Rightarrow c)$
- $[a \wedge (b \vee c)] \Leftrightarrow [(a \wedge b) \vee c]$
- $[a \wedge (b \vee c)] \Leftrightarrow [(a \wedge b) \vee (a \wedge c)]$

→ **Úloha 3.** Znegujte nasledovné zložené výroky

- $a \wedge (b \Rightarrow \neg c)$
- $(a \Rightarrow \neg b) \vee (\neg c \Leftrightarrow a)$
- $a \wedge [(b \wedge \neg a) \vee (c \wedge \neg b)]$

→ **Úloha 4.** Zjednodušte nasledovné zložené výroky:

- $[a \vee (\neg b \vee a)] \wedge (\neg a \vee b)$
- $((b \wedge a) \vee (a \wedge \neg b)) \Rightarrow (c \vee a)$
- $((b \wedge a) \vee (a \wedge \neg b)) \Rightarrow (c \wedge a)$

→ **Úloha 5.** Vyjadrite operácie \Rightarrow a \Leftrightarrow pomocou operácií \neg , \wedge , \vee .

Úloha 6. Vyjadrite operáciu \vee pomocou \neg a \wedge .

Úloha 7. Viete nájsť jednu logickú spojku, pomocou ktorej možno vyjadriť všetky logické spojky? Ak áno, skúste vyjadriť \wedge , \vee , \Rightarrow pomocou danej spojky.

Úloha 8. Iba pomocou výrokových spojok (teda nie pomocou kvantifikátorov, množín a iných vecí) zapíšte výroky, ktoré budú vyjadrovať:

- Práve jeden z výrokov a , b , c je pravdivý.

b) Práve dva z výrokov a , b , c sú pravdivé.

Úloha 9. Na ostrove žijú poctivci a klamári. Poctivec vždy hovorí pravdu a klamár vždy iba klame. Na brehu ostrova sú Anton a Beáta. Príde k nim cudzinec a pýta sa Antona: „Ste klamár alebo poctivec?“ Anton odpovie nezrozumiteľne. Cudzinec sa otočí k Beate: „Čo hovoril?“ Beáta odpovedá: „Hovoril, že je klamár.“ Čo sú Anton a Beáta? Dá sa to určiť? Mohli niečo také povedať?

Úloha 10. Nieкто zo štyroch kamarátov zjedol koláč, ktorý bol pre všetkých. Katka vraví: „Anna zjedla koláč.“ Zuzka: „Ja som zjedla koláč.“ Anna: „Peter ho zjedol.“ Peter: „Anna klame, keď hovorí, že ja som ho zjedol.“ Ak je len jeden z výrokov pravdivý, kto je páchatel’?

Úloha 11. Na vesmírnej lodi sú astronauti a podvodníci. Astronaut vždy hovorí pravdu a podvodník vždy klame. Medzi Červeným, Zeleným a Modrým sa udial nasledovný rozhovor:

Červený: „Zelený je astronaut, ale Modrý je podvodník.“

Zelený: „Červený aj Modrý sú podvodníci.“

Modrý: „Červený aj Zelený sú podvodníci.“

Určte, kto sú astronauti a kto podvodníci.

Úloha 12. Určte, kto je kto po nasledovnom rozhovore:

Červený: „Ak Modrý hovorí pravdu, tak Zelený je podvodník.“

Zelený: „Ak Červený hovorí pravdu, tak Modrý je podvodník.“

Modrý: „Ak je Zelený astronaut, tak Modrý je tiež astronaut.“

Určte, kto sú astronauti a kto podvodníci.

Úloha 13. Určte, kto je kto po nasledovnom rozhovore:

Červený: „Žltý je podvodník, no Zelený je astronaut.“

Žltý: „Zelený je podvodník, no Modrý je astronaut“

Zelený: „Modrý je podvodník, no Červený je astronaut“

Modrý: „Zelený je podvodník, no Červený je astronaut.“

Úloha 14. Rozhodnite, či nasledovné zložené výroky sú tautológie:

a) $(a \vee (b \wedge c)) \Rightarrow a$

b) $(a \Rightarrow b) \Rightarrow [(b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)]$

c) $[a \Rightarrow (b \Rightarrow c)] \Leftrightarrow [(a \Rightarrow b) \Rightarrow c]$

d) $c \Rightarrow [(a \Rightarrow b) \vee (a \Rightarrow \neg c)]$

e) $[a \Rightarrow (b \vee c)] \wedge [(a \wedge \neg b) \Rightarrow (c \Rightarrow \neg b)]$

Úloha 15. Znegujte zložené výroky z predošlej úlohy:

Riešenia úloh

2. Iba d) nie je tautológia: nepravdu dostaneme pre $v(a) = 0$, $v(c) = 1$ a $v(b)$ ľubovoľné (iné možnosti nie sú).

8.

a) $(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \vee c)$

b) $(a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \vee c)$

11. Červený a Zelený sú podvodníci. Modrý je astronaut.

12. Práve dvaja z nich sú podvodníci. Všetky tri kombinácie sú možné.

15.

a) $(a \vee (b \wedge c)) \wedge \neg a$

b) $(a \Rightarrow b) \wedge [(b \Rightarrow c) \wedge (a \wedge \neg c)]$, príp. po odstránení zbytočných zátvoriek: $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c) \wedge a \wedge \neg c$

c) $[a \Rightarrow (b \Rightarrow c)] \Leftrightarrow [(a \Rightarrow b) \wedge \neg c]$

d) $c \wedge [(a \wedge \neg b) \wedge (a \wedge c)]$

e) $[a \wedge (\neg b \wedge \neg c)] \vee [(a \wedge \neg b) \wedge (c \wedge b)]$