Cvičenie 2: Kvantifikované výroky

V matematike často stretneme vety, ktoré vyzerajú ako výroky, len obsahujú premenné. Práve tieto premenné nám bránia v určení pravdivostnej hodnoty, preto nejde o výroky.

Voľne povedané, *výroková forma* je oznamovacia veta s premennými, ktorá sa stane výrokom, keď za premenné dosadíme hodnoty. Výrokové formy označujeme rovnako ako výroky (teda v našom prípade malými písmenami) s tým, že za ne do zátvorky pridáme premenné ktoré obsahujú. Napr. výroková forma $a(x)$ obsahuje jednu premennú a výroková forma $b(x, y)$ zas dve premenné.

Z výrokovej formy možno spraviť výrok dosadením konkrétnej hodnoty (hodnôt) z jej oboru za jej premennú (premenné) alebo pridaním kvantifikátora.

- Všeobecný (veľký) kvantifikátor: $\forall x\colon a(x)$ (pre všetky x platí $a(x)$)
- Existenčný (malý) kvantifikátor: $\exists x\colon a(x)$ (existuje x, pre ktoré platí $a(x)$)

Pri zápise niektorých výrokov využívame nasledovné matematické značenia:

- $d \mid a$: číslo d delí číslo a / číslo a je deliteľné číslom d / číslo a je násobkom čísla d;
- $a \bmod d = z$: zvyšok čísla a po delení číslom d je z;

V úlohe 10 pomocou výrokovej logiky vyjadríte, čo presne tieto tvrdenia znamenajú.

→ **Úloha 1.** Vyjadrite slovne nasledovné výroky a určte ich pravdivostnú hodnotu.

a) $\exists x \in \mathbb{Z}\colon x > 5$

b) $\forall x \in \mathbb{Z}\colon x^2 > 0$

c) $\forall x \in \mathbb{R}^+\colon \sqrt{x} \in \mathbb{R}^+$

d) $\exists x \in \mathbb{R}\colon x^2 = -1$

e) $(\exists x \in \mathbb{Z}\colon x = 5) \Rightarrow (\forall y \in \mathbb{Z}\colon y = 5)$

f) $(\exists x \in \mathbb{Z}\colon x = 5) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{Z}\colon x = 5)$

→ **Úloha 2.** Rozhodnite o pravdivosti nasledovných tvrdení:

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0,$

b) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0,$

c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0,$

d) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0,$

→ **Úloha 3.** Rozhodnite o pravdivosti nasledovných tvrdení:

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon xy = 0,$

b) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon xy = 0,$

c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon xy = 0,$

d) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon xy = 0.$

Úloha 4. Rozhodnite, ktoré výroky sú pravdivé.

a) $\exists x \in \mathbb{R}\colon x \cdot 1 = x$

b) $\forall x \in \mathbb{R}\colon x \cdot 1 = x$

c) $\exists x \in \mathbb{R}\colon x \cdot x = 1$

d) $\forall x \in \mathbb{R}\colon x \cdot x = 1$

e) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$

f) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$

g) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$

h) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$

Úloha 5. Rozhodnite, ktoré výroky sú pravdivé.

a) $\exists n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}\colon k > n$

b) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}\colon k > n$

c) $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\colon k > n$

d) $\exists n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}\colon k \mid n$

e) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}\colon k \mid n$

f) $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\colon k \mid n$

Úloha 6. Znegujte nasledovné výroky.

→ a) $\exists n \in \mathbb{N}\colon 42 < n < 47$

→ b) $\forall a \in \mathbb{N}^+\ \exists b \in \mathbb{N}\ \forall c \in \mathbb{N}\colon (c > b \Rightarrow c^a < 2^c)$

→ c) $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\colon [(a \notin \mathbb{Q} \wedge b > 0) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Q}\colon |a - c| < b]$

→ d) $\forall a \in \mathbb{N}\colon [(\exists b \in \mathbb{N}\colon a = b^2) \Rightarrow [(\forall c \in \mathbb{N}\colon a \neq 3c) \Rightarrow (\exists d \in \mathbb{N}\colon a + 2 = 3d)]]$

e) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon [(x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}\colon [c = x \cdot y \Rightarrow [\forall z \in \mathbb{R}\colon (z > c \Rightarrow z > 0)]]$

Znegujte aj výroky z predošlých úloh.

Úloha 7. Aký význam budú mať výroky $\forall x \in M\colon a(x)$, $\exists x \in M\colon a(x)$ ak je M a) jednoprvková b) prázdna množina?

Úloha 8. Určte, o čom hovoria nasledujúce výroky, určte ich pravdivostnú hodnotu a znegujte ich.

a) $\exists x \in \mathbb{Z}\colon (x \bmod 2 = 0 \vee x \bmod 2 = 1)$

b) $\forall x \in \mathbb{Z}\colon (x \bmod 2 = 0 \vee x \bmod 2 = 1)$

c) $\exists x \in \mathbb{Z}\colon (x \bmod 2 = 0 \wedge x \bmod 2 = 1)$

d) $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\colon [(a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q} \wedge a \neq b) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}\colon (c \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \wedge a < c < b)]$

e) $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\colon [(a \notin \mathbb{Q} \wedge b > 0) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}\colon (c \in \mathbb{Q} \wedge |a - c| < b)]$,

f) $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{R}\colon [(a \in \mathbb{N}^+ \wedge b \in \mathbb{N}^+) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}\colon (c \neq 0 \wedge a^2 - 2b^2 = c)]$

g) $\forall a \in \mathbb{R}\colon [a \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R}\colon [b \in \mathbb{N} \wedge (\forall c\colon (c \in \mathbb{N} \wedge c > b) \Rightarrow c^a < 2^c)]]$

Úloha 9. Zapíšte nasledovné výroky (pri úlohách o prvočíslach môžete využiť výrokovú formu $p(x)$ definovanú ako „x je prvočíslo“):

→ a) Každé číslo deliteľné desiatimi je deliteľné aj dvomi.

→ b) Žiadne prvočíslo nie je párne.

→ c) Súčet párnych čísel je párny.

d) Medzi ľubovoľnými dvomi racionálnymi číslami je nejaké iracionálne.

e) Súčet ľubovoľných troch za sebou idúcich celých čísel je deliteľný tromi.

→ f) Existuje práve jedno párne číslo.

→ g) Číslo 1 je najmenšie nepárne prirodzené číslo.

h) Číslo 6 je najväčším spoločným deliteľom čísel 24 a 36.

→ i) Ak je nejaké celé číslo väčšie ako 5, tak aj číslo o 1 väčšie je väčšie ako 5.

j) (*) Prvočísel je nekonečne veľa.

k) (*) Pre každé celé čísla a, d ($d \neq 0$) vieme jednoznačne určiť zvyšok čísla a po delení číslom d.

Úloha 10. Zostavte výrokové formy, ktoré budú hovoriť nasledovné:

a) a je párne číslo.

b) a je deliteľné piatimi.

→ c) $d \mid a$: číslo a je deliteľné číslom d.

d) a dáva zvyšok 3 po delení 7-mimi.

→ e) $a \bmod d = z$: a dáva zvyšok z po delení číslom d.

f) a je najmenšie číslo množiny M (M je podmnožina celých čísel)

g) Číslo d je najväčším spoločným deliteľom čísel a, b.

h) $p(x)$: x je prvočíslo

Poznámka. Premenné použité v týchto výrokových formách môžu byť väčšinou brané len z niektorých množín (napr. celé čísla). Tieto zamlčané podmienky si doplňte podľa toho, ako sú známe.

Riešenia úloh

1.

a)	$\exists x \in \mathbb{Z}\colon x > 5$	Existuje celé číslo väčšie ako 5	T
b)	$\forall x \in \mathbb{Z}\colon x^2 > 0$	Druhá mocnina každého celého čísla je kladná.	F
c)	$\forall x \in \mathbb{R}^+\colon \sqrt{x} \in \mathbb{R}^+$	Odmocnina každého reálneho čísla je kladná.	T
d)	$\exists x \in \mathbb{R}\colon x^2 = -1$	Existuje reálne číslo, ktorého druhá mocnina je -1	F
e)	$(\exists x \in \mathbb{Z}\colon x = 5) \Rightarrow (\forall y \in \mathbb{Z}\colon y = 5)$	Ak existuje celé číslo rovné piatim, tak všetky celé čísla sú rovné piatim.	F
f)	$(\exists x \in \mathbb{Z}\colon x = 5) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{Z}\colon x = 5)$	Ak existuje celé číslo rovné piatim, tak všetky celé čísla sú rovné piatim.	F

Zdôvodnenia:

a) Platí, lebo napr. $x = 42$ je celé číslo a je väčšie ako 5.

b) Neplatí, lebo $x = 0$ je celé číslo, ale neplatí preň $0^2 > 0$.

c) Platí, ide o známe tvrdenie.*

d) Neplatí, lebo také číslo neexistuje – druhá mocnina každého reálneho čísla je nezáporná.*

e) Neplatí. Ide o zložený výrok – implikáciu, ktorá sa skladá z dvoch výrokov. Na ľavej strane je pravdivý výrok – lebo napr. 5 je celé číslo, ktoré je rovné piatim. Na pravej nepravdivý výrok – lebo napr. pre $x = 6$ (čo je celé číslo) dostaneme nepravdu $6 = 5$.

f) Neplatí. Ide o totožný výrok ako v e). Hoci v oboch výrokoch je použitá premenná x, táto premenná platí iba vrámci daného kvantifikovaného výroku. Čiže ide vlastne o dve rôzne premenné. Podobnú situáciu vieme stretnúť aj v programovaní, kedy bežne na rôznych miestach v kóde používame premenné s rovnakým názvom (napr. dva for-cykly s premennou i).

* Tieto podúlohy nie sú zrovna reprezentatívne z pohľadu argumentácie. Áno, ide o zjavné tvrdenia a v tomto prípade je zdôvodnenie v poriadku. Neskôr sa budeme viac venovať zdôvodňovaniu takýchto všeobecných tvrdení a vtedy zdôvodnenie „Je to zjavné“ nemusí stačiť.

2. Riešenia úloh sú zoradené podľa ich náročnosti

a) Neplatí, lebo pre $x = 1$, $y = 2$ neplatí $1 + 2 = 0$.

d) Platí, lebo pre $x = 3$, $y = -3$ platí $3 + (-3) = 0$.

c) Platí, lebo pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$ a pre $y = -x$ platí $x + (-x) = 0$.

b) Neplatí, lebo pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$ zvolíme $y = 1 - x$ (čo je zjavne reálne číslo), pre ktoré máme $1 + (1 - x) = 1 \neq 0$, teda výrok $1 + (1 - x) = 0$ neplatí.

Uvedomme si, že v podúlohe b) sme vlastne dokazovali negáciu tvrdenia, ktorý vyzerá: $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \colon x + y \neq 0$. Preto sme použili takúto štruktúru – začali sme dokazovať všeobecný výrok „Pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R} \ldots$ “ a pre toto všeobecné x sme začali dokazovať existenčný výrok, čo sme začali voľbou y. Po prejdení kvantifikátorov sme dokazovali, že platí $x + y \neq 0$.

Výroky b) a c) ilustrujú, že na poradí kvantifikátorov záleží. To môžeme ilustrovať aj rôznymi slovnými významami výrokov b) a c):

b) Existuje reálne číslo, ktoré dáva súčet 0 s ľubovoľným reálnym číslom.

c) Každé reálne číslo dáva súčet 0 s nejakým reálnym číslom.

3.

a) Neplatí, lebo pre $x = 4$ a $y = 2$: $4 \cdot 2 \neq 0$.

b) Platí, lebo pre $x = 0$ platí $\forall y \in \mathbb{R} \colon 0 \cdot y = 0$

c) Platí, lebo pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí: pre $y = 0$ dostaneme $x \cdot 0 = 0$.

d) Platí, lebo pre $x = 0$ a $y = -17$ platí $0 \cdot (-17) = 0$.