Cvičenie 3. Dôkazy

V nasledovných úlohách a aj neskôr na predmete sa budeme často stretávať s nasledovnými pojmami:

- Pre celé čísla a, d: $d \mid a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\colon a = k \cdot d$ (zápis čítame tiež „d delí a“, „d je deliteľom a“, „a je deliteľné d“).
- Pre celé čísla a, d, z: $a \bmod d = z \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\colon a = k \cdot d + z$ (čítame: „a dáva zvyšok z po delení d“).
- Racionálne číslo je také číslo, ktoré možno vyjadriť v tvare a/b, kde $a \in \mathbb{Z}$ a $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Množinu všetkých racionálnych čísel označujeme $\mathbb{Q}$.

O týchto pojmoch existuje veľa tvrdení (napr. súčet dvoch racionálnych čísel je racionálne číslo), ktoré zrejme aj poznáte zo strednej školy. V nasledovných úlohách si niektoré alebo podobné tvrdenia dokážeme. Preto ich v dôkazoch nevyužívajte. Snažte sa dôkazy spraviť čo najviac len z definície.

→ **Úloha 1.** Dokážte nasledovné tvrdenia:

a) $\forall a,\, b \in \mathbb{R}_0^+\colon \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

b) $\exists x \in \mathbb{R}\colon 3x + 2 > 2x + 5$

c) $\forall x \in \mathbb{R}^+ \ \exists y \in \mathbb{R}^+\colon x \cdot y = 1$

d) $\exists x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R}\colon xy = 0$

e) $\forall x \in \mathbb{R}^+\colon \big(3x + 5 < 2^x \Rightarrow 4x + 8 < 2^{x+1}\big)$

f) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\colon [(5 \mid a \wedge 5 \mid b) \Rightarrow 5 \mid (a+b)]$

g) $\forall n \in \mathbb{N}\colon (7 \nmid 47n \Rightarrow 7 \nmid n)$

h) $\forall x,\, y \in \mathbb{R}^+\colon \Big(7x + \frac{3}{y} < 4y + \frac{2}{x} \Rightarrow x < y\Big)$.

i) $\log_2 3$ je iracionálne číslo.

Úloha 2. Rozhodnite, či nasledovné tvrdenia sú tautológie

→ a) $[(a \Rightarrow b) \wedge (c \vee d) \wedge ((\neg a \wedge c) \Rightarrow e)] \Rightarrow [\neg b \Rightarrow (e \vee d)]$,

→ b) $[(\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge d) \vee (e \wedge \neg c \wedge \neg a)] \Rightarrow [(\neg b \wedge \neg c) \Rightarrow a]$,

→ c) $[(\neg a \Rightarrow b) \vee (c \wedge d) \vee (e \wedge \neg c \wedge a)] \Rightarrow [(\neg b \wedge \neg c) \Rightarrow a]$,

d) $(a \wedge b) \Rightarrow (c \vee (d \Rightarrow (e \vee (a \wedge d))))$

e) $[(a \Rightarrow b) \wedge (\neg b \vee c)] \Rightarrow [((c \Rightarrow d) \wedge a) \Rightarrow d]$

f) $(a \wedge \neg b) \vee [((\neg c \vee d) \wedge (a \vee \neg e) \wedge (f \vee \neg g)) \Rightarrow (d \vee \neg e)]$

g) $(a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg b \Rightarrow (d \wedge \neg e)) \vee (\neg c \wedge d \wedge e) \vee (d \Rightarrow (\neg a \wedge c))$

h) $(a \Rightarrow \neg c) \vee (\neg b \Rightarrow (\neg d \Rightarrow e)) \vee ((f \wedge c) \Rightarrow (a \wedge \neg d))$.

Úloha 3. Pre každý z uvedených výrokov nájdite taký príklad množiny M a výrokových foriem $a(t)$, $b(t)$ a $c(t)$ definovaných na množine M, aby po ich dosadení do výroku sme dostali pravdivý / nepravdivý výrok

→ a) $[\exists x \in M\colon a(x) \wedge \exists y \in M\colon b(y)] \Rightarrow \forall z \in M\colon (a(z) \Rightarrow b(z))$

b) $\forall x \in M\colon\ [a(x) \Rightarrow \exists y \in M\colon b(y)] \Rightarrow \forall x \in M\colon (a(x) \Rightarrow b(x))$

c) $[\forall x \in M\colon a(x) \Rightarrow \exists y \in M\colon b(y)] \Rightarrow \forall x \in M\colon \exists y \in M\colon (a(x) \Rightarrow b(y))$

d) $[\forall x \in M\colon \exists y \in M : (a(x) \Rightarrow b(y)) \wedge \exists x \in M\colon \forall y \in M\colon (b(x) \Rightarrow c(y))] \Rightarrow \forall x \in M\colon (a(x) \Rightarrow c(x))$

e) $\forall x \in M\colon (a(x) \Rightarrow \neg b(x)) \Rightarrow [\forall x \in M\colon (a(x) \Rightarrow b(x)) \vee \forall x \in M\colon (b(x) \Rightarrow a(x))]$

Úloha 4. Zistite, či nasledovné výroky sú tautológie. V prípade, že nejde o tautológiu, možno dostať tautológiu nahradením $\Leftrightarrow$ za $\Leftarrow$ alebo $\Rightarrow$?

$\rightarrow$ a) $\forall x\colon a(x) \Rightarrow \exists x\colon a(x)$

$\rightarrow$ b) $\exists x\colon a(x) \Rightarrow \forall x\colon a(x)$

$\rightarrow$ c) $\forall x\colon (a(x) \wedge b(x)) \Leftrightarrow (\forall x\colon a(x) \wedge \forall x\colon b(x))$

$\rightarrow$ d) $\forall x\colon (a(x) \vee b(x)) \Leftrightarrow (\forall x\colon a(x) \vee \forall x\colon b(x))$

e) $\exists x\colon (a(x) \wedge b(x)) \Leftrightarrow (\exists x\colon a(x) \wedge \exists x\colon b(x))$

f) $\exists x\colon (a(x) \vee b(x)) \Leftrightarrow (\exists x\colon a(x) \vee \exists x\colon b(x))$

$\rightarrow$ g) $\forall x\colon (a(x) \Rightarrow b(x)) \Leftrightarrow (\forall x\colon a(x) \Rightarrow \forall x\colon b(x))$

h) $\exists x\colon (a(x) \Rightarrow b(x)) \Leftrightarrow (\forall x\colon a(x) \Rightarrow \exists x\colon b(x))$

i) $(\forall x\colon a(x) \Rightarrow \exists x\colon b(x)) \Leftrightarrow \exists x\colon (a(x) \Rightarrow b(x))$

Úloha 5. Dokážte nasledovné tvrdenia:

a) $\forall a, b \in \mathbb{N}\colon [(22 \mid a \wedge 33 \mid b) \Rightarrow 11 \mid (a+b)]$

b) $\forall n \in \mathbb{Z}\colon (3 \nmid n \Rightarrow n^2 \bmod 3 = 1)$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^+\colon (2^n < n! \Rightarrow 2^{n+1} < (n+1)!)$

d) $\forall n \in \mathbb{N}\colon (5 \mid n^2+1 \Rightarrow 10 \nmid n)$

e) $\forall a, b \in \mathbb{N}\colon [(a \bmod 7 = 4 \wedge b \bmod 7 = 5) \Rightarrow ab \bmod 7 = 6]$

f) $\forall a, b \in \mathbb{R}^+\colon \dfrac{a+b}{2} \leq \dfrac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$

g) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+\colon \left(5x^2+7x+2 \leq 4y^2+3y \Rightarrow x \leq y\right).$

Úloha 6. Dokážte, že nasledovné čísla sú iracionálne. Môžete pritom využiť, že číslo π je iracionálne.

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{p}$, kde p je ľubovoľné prvočíslo

c) 2π

d) $\dfrac{47}{\sqrt[3]{\pi}+42}$

Úloha 7. Rozhodnite o pravdivosti nasledovných výrokov. vaše tvrdenia dokážte.

a) Súčet ľubovoľných troch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný tromi.

b) Súčet ľubovoľných štyroch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný štyrmi.

c) Súčin ľubovoľných troch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný tromi.

d) Súčin ľubovoľných päť za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný piatimi.

e) Súčin ľubovoľných päť za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný číslom 120.

f) Súčet tretích mocnín troch za sebou idúcich čísel je deliteľný deviatimi.

g) Súčet dvoch racionálnych čísel je racionálny.

h) Súčet dvoch iracionálnych čísel je iracionálny.

i) Súčin dvoch racionálnych čísel je racionálny.

j) Súčin dvoch iracionálnych čísel je iracionálny.

k) Súčet racionálneho a iracionálneho čísla je iracionálny.

l) Ak súčin dvoch reálnych čísel je iracionálne číslo, tak aspoň jedno z nich musí byť iracionálne.

m) Ak súčet piatich reálnych čísel je nula, tak aspoň jedno z nich je nezáporné.

n) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\colon [(a \mid b \wedge a \mid c) \Rightarrow a \mid (b + c)]$

o) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\colon [a \mid (b + c) \Rightarrow (a \mid b \wedge a \mid c)]$

p) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\colon [a \mid bc \Rightarrow (a \mid b \wedge a \mid c)]$

q) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\colon [(\mathrm{NSD}(a, b) = \mathrm{NSD}(b, c) = 1 \Rightarrow \mathrm{NSD}(a, c) = 1]$

r) $\forall a, b \in \mathbb{Z}\colon [(\mathrm{NSD}(a, b) = \mathrm{NSD}(b, c) = 2 \Rightarrow \mathrm{NSD}(a, c) = 2]$

s) Ak $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ pre nejaké racionálne čísla a, b, tak aj $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, aj $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

t) Z ľubovoľných piatich za sebou idúcich čísel možno vybrať štyri čísla, ktorých súčet bude deliteľný štyrmi.

Úloha 8. *Pytagorejská trojica* je taká trojica kladných celých čísel a, b, c, pre ktoré platí $a^2 + b^2 = c^2$. Rozhodnite, či v každej pytagorejskej trojici:

a) sa nachádza aspoň jedno párne číslo;

b) sa nachádza aspoň jedno číslo deliteľné tromi;

c) sa nachádza aspoň jedno číslo deliteľné štyrmi;

d) sa nachádza aspoň jedno číslo deliteľné šiestimi;

e) sa nachádza aspoň jedno číslo deliteľné siedmimi.

Úloha 9. Rozhodnite o platnosti nasledovných výrokov:

a) $\exists c \in \mathbb{R}\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon 47n^5 + 42n^3 + 17n^2 - 9 \leq cn^5$

b) $\exists c \in \mathbb{R}\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon n^2 + 47 \leq cn$

c) $\exists K \in \mathbb{R}\colon \forall x \in \mathbb{R}\colon (x \geq K \Rightarrow x^7 - 50x^6 - 47x^5 - 42x^3 - 17x^2 + 18x - 9 \geq 0)$

Úloha 10. Nech a, b sú kladné celé čísla opačnej parity. Dokážte, že ak nemožno krátiť zlomok $\frac{a}{b}$, tak nemožno krátiť ani zlomok $\dfrac{a-b}{a+b}$.

Úloha 11. Máme reálne čísla a, b, c také, že čísla

$$\frac{1}{b+c}, \qquad \frac{1}{c+a}, \qquad \frac{1}{a+b}$$

tvoria aritmetickú postupnosť. Dokážte, že aj čísla a^2, b^2, c^2 tvoria aritmetickú postupnosť.

Úloha 12. Dokážte, že ak x, y sú celé čísla pre ktoré platí $31 \mid 6x + 11y$, potom aj $31 \mid x + y$.

Úloha 13. Nech a, b, c sú reálne čísla, pre ktoré platí $a + b + c = 0$. Dokážte, že

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = -3.$$

Úloha 14. Dokážte, že neexistuje mnohočlen $f(x)$ s celočíselnými koeficientmi, pre ktorý by platilo $f(7) = 11$ a $f(11) = 13$.

Úloha 15. Je číslo $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ racionálne?

Úloha 16. Dokážte, že ak existuje nekonečne veľa prvočísel p, pre ktoré je aj $p + 2$ prvočíslo, tak potom existuje nekonečne veľa prvočísel p, pre ktoré je $p + 2$ prvočíslo a navyše $p + 1$ je deliteľné 6-timi.

Úloha 17. (*) Dokážte, že prvočísel je nekonečne veľa.

Úloha 18. (*) Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je číslo 2 najväčším spoločným deliteľom čísel $2n+6$, $4n + 10$.

Úloha 19. (*) Dokážte, že ak existuje nekonečne veľa palindromických prvočísel (čítajú sa rovnako spredu aj odzadu), tak existuje aj nekonečne veľa palindromických prvočísel, ktoré majú nepárny počet cifier.