# Cvičenie 4: matematická indukcia

**Úloha 1.** Dokážte, že pre všetky kladné celé čísla $n$ platí

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

→ **Úloha 2.** Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 2$ platí rovnosť

$$2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1}.$$

Ďalšie úlohy na dokazovanie súčtov nájdete v `http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~rajnik/udds/zbierka.pdf`, str. 10.

→ **Úloha 3.** Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené číslo $t$ je číslo $8^t + 6$ deliteľné siedmimi.

→ **Úloha 4.** Nech $F_0 = 0$ a $F_1 = 1$. Pre $k \geq 2$ položme $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ (tzv. Fibonacciho postupnosť). Dokážte, že pre ľubovoľné prirodené číslo $k$ platí

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_k = F_{k+2} - 1.$$

**Úloha 5.** Nájdite všetky prirodzené čísla $n$, pre ktoré platí

→ a) $2^n \geq n - 2$,

b) $n^2 \leq 2^n$.

c) $n! > 2^n$,

d) $2n < 3^n$,

e) $3^n + 4^n \geq 5^n$,

f) $2^n \geq 20n$,

g) $3^n < n!$,

h) $(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$.

**Úloha 6.** Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 2$ platí

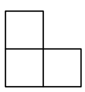
$$1! + 2! + 3! + \cdots + n! < \frac{(n+1)!}{n-1}.$$

→ **Úloha 7.** Dokážte, že $n$ priamok v rovine má najviac $n(n-1)/2$ priesečníkov.

**Úloha 8.** Na stole máme v rade $n$ mincí zľava doprava, ktoré môžu byť ľubovoľne otočené (buď lícom nadol, alebo nahor). V jednom ťahu môžeme zobrať niekoľko prvých mincí zľava a každú z nich otočiť. Dokážte, že môžeme naše ťahy voliť tak, aby sme po nejakom čase mali všetky mince otočené lícom nahor.

**Úloha 9.** Máme rad $n$ políčok, ktoré sú striedavo biele a čierne. Do týchto políčok vpíšeme v nejakom poradí čísla $1, 2, \ldots, n$, každé práve raz. V jednom kroku môžeme zvoliť políčka rôznej farby a vymeniť na nich čísla. Dokážte, že bez ohľadu na to, v akom poradí čísla vpíšeme do políčok, nám stačí spraviť $2n - 2$ krokov na to, aby sme čísla usporiadali vzostupne.

→ **Úloha 10.** Máme štvorčekovú sieť rozmerov $2^n \times 2^n$ štvorčekov, na ktorej je jedno políčko čierne, zvyšné sú biele. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n$ a pre každú pozíciu čierneho políčka vieme štvorčekovú sieť vydláždiť dlaždicami v tvare triomina L (ako na obrázku) tak, že sa dlaždice nebudú prekrývať a každé biele políčko bude zakryté dlaždicou. Dlaždice vieme aj otáčať.



**Úloha 11.** *Hanojské veže* je hlavolam, ktorý sa skladá z troch tyčí (veží) a $n$ diskov (s dierou uprostred) rôznych veľkostí. Na začiatku sú všetky disky uložené na jednej veži. V jednom ťahu môžeme presunúť najvrchnejší disk z jednej veže a položiť ho na vrch druhej veže. Po celý čas musíme dodržať pravidlo, že väčší disk nemôže byť položený na menší disk. Cieľom hlavolamu je presunúť všetky disky z jednej tyče na druhú tyč. Dokážte, že tento hlavolam možno vyriešiť pomocou $2^n - 1$ ťahov.

## Ďalšie úlohy na precvičovanie

**Úloha 12.** Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n$ platí:

a) $3 \mid n^3 - n$,

b) $5 \mid n^5 - n$,

c) $31 \mid 5^{n+1} + 6^{2n-1}$,

d) $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

**Úloha 13.** Nájdite všetky prirodzené čísla $n$, pre ktoré platí

a) $n! > 2^n$,

b) $2n < 3^n$,

c) $3^n + 4^n \geq 5^n$,

d) $2^n \geq 20n$,

e) $3^n < n!$,

f) $(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$.

**Úloha 14.** Dokážte, že políčka tabuľky $2^n \times 2^n$ možno zafarbiť bielou a čiernou farbou tak, že keď si zoberieme ľubovoľné dva riadky, tak sa budú na polovici miest zhodovať a na zvyšnej polovici miest líšiť.

**Úloha 15.** V bani s neobmedzeným množstvom poschodí, ktoré sú zhora nadol očíslované $-1$, $-2$, $-3$, ..., pracuje niekoľko (konečne veľa) trpaslíkov. Každý deň, v rovnakom čase, z každého poschodia, na ktorom sa nachádzajú aspoň dvaja trpaslíci, sa práve jeden trpaslík presunie nadol o toľko poschodí, koľko kolegov mal v ten deň na svojom poschodí. Dokážte, že po určitom (konečnom) počte dní bude na každom poschodí najviac jeden trpaslík.

**Úloha 16.** Pod *rozlomením* obdĺžnikovej tabuľky čokolády rozumieme jej rozdelenie (pozdĺž priamky, ktorá prechádza hranami medzi štvorčekmi) na dve obdĺžnikové tabuľky, ktoré dohromady obsahujú rovnaký počet štvorčekov ako pôvodná tabuľka. Dokážte, že každú obdĺžnikovú tabuľku s $n \in \mathbb{N}^+$ políčkami možno rozdeliť na jednotlivé štvorčeky pomocou $n-1$ rozlomení. Ako by sa zmenilo riešenie úlohy ak by bola zadaná pre tabuľku $a \times b$ políčok, kde $a, b \in \mathbb{N}^+$.

**Úloha 17.** Máme 3 tyče označené $A$, $B$, $C$ a $2n$ diskov, ktoré sú všetky umiestnené na tyči $A$ a v poradí zhora nadol sú očíslované $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$. V jednom ťahu môžeme vziať vrchný disk z ľubovoľnej tyče a umiestniť ho na vrch ľubovoľnej inej tyče, avšak nesmieme pritom položiť disk s väčším číslom na disk s menším číslom. (Disky s rovnakými číslami na seba môžeme ukladať.) Dokáže, že pre každé celé číslo $n \geq 0$ vieme pomocou $2^{n+1} - 2$ ťahov premiestniť všetky disky z tyče $A$ na tyč $B$.

**Bonus.** Napíšte program, ktorý zo vstupu načíta číslo $n$ a vypíše postupnosť ťahov, ktorá presunie disky z tyče $A$ na tyč $B$. Každý ťah bude v samostatnom riadku, ktorý bude tvaru `XY`, ktorý znamená, že z tyče `X` presúvame disk na tyč `Y`.

**Úloha 18.** *(3,5 boda)* Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n$ existujú prirodzené čísla $a$, $b$ také, že

$$(1 + \sqrt{2})^n = a\sqrt{2} + b.$$

**Úloha 19.** Dokážte, že pre každé celé číslo $n \geq 1$ platí

$$\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n} < \frac{2^{n+2}}{n}.$$

## Náročnejšie úlohy

**Úloha 20.** Nech $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, \ldots$ sú fibonacciho čísla. Dokážte, že pre ľubovoľné $n \geq 1$ platí:

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - F_1$$

**Úloha 21.** Nech $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ je $n$ kladných reálnych číslel. Dokážte, že

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq n - 1 + \prod_{i=1}^{n} \max(1, a_i),$$

teda

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n - 1 + \max(1, a_1) \max(1, a_2) \cdots \max(1, a_n).$$

**Úloha 22.** Dokážte, že pre ľubovoľných $n$ kladných reálnych čísel $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ so súčinom 1 platí

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n.$$

Pri dôkaze nevyužívajte známe nerovnosti.

**Úloha 23.** Dokážte, že pre ľubovoľných $n$ kladných reálnych čísel $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ platí nerovnosť

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

**Úloha 24.** Dokážte, že pre každé prvočíslo $p$ a každé prirodzené číslo $n$ platí $p \mid n^p - n$.

**Úloha 25.** Turnaja sa zúčastnilo $n$ tímov. Každá (neusporiadaná) dvojica tímov odohrala práve jeden zápas. Každý zápas sa skončil výhrou niektorého tímu. Dokáže, že tímy možno zoradiť do postupnosti $t_1$, $t_2$, …, $t_n$ tak, že tím $t_1$ vyhral nad tímom $t_2$, tím $t_2$ nad $t_3$ a tak ďalej až tím $t_{n-1}$ vyhral nad tímom $t_n$.

**Úloha 26.** Nech $x$ je reálne číslo a $x + \frac{1}{x}$ je celé číslo. Dokážte, že potom aj $x^n + x^{-n}$ je celé číslo pre všetky prirodzené čísla $n$.

# Riešenia úloh

## Úloha 8

Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou.

Pre $n = 1$: ak je jediná minca otočená lícom nahor, skončili sme, inak ju vieme otočiť.

Nech $n \in \mathbb{N}^+$:
Indukčný predpoklad (IP): Ak máme v rade $n$ mincí, tak ich vieme danými ťahmi otočiť všetky lícom nahor. Dokážeme, že ak máme v rade $n + 1$ mincí, tak ich vieme tiež danými ťahmi otočiť:

1. Ak je posledná minca lícom nadol, tak otočíme všetky mince (prvých $n + 1$ zľava).

2. Teraz máme poslednú mincu otočenú lícom nahor. Podľa indukčného predpokladu vieme aj prvých $n$ mincí otočiť lícom nahor – ignorovanie poslednej mince nám úseky mincí zľava nemení.

Takže vieme aj rad $n + 1$ mincí otočiť lícom nahor. Dôkaz indukciou je tak hotový.

## Úloha 10

**Báza.** Úlohy dokážeme matematickou indukciou. Pre $n = 0$ máme sieť rozmerov $1 \times 1$, kde je len jedna možnosť pre čierne políčko. Vtedy je 0 bielych dlaždíc, a teda každá je pokrytá triominom L.

**Indukčný krok.** Predpokladajme, že štvorčekovú sieť rozmerov $2^k \times 2^k$ vieme vydláždiť podľa zadania pre každú pozíciu čierneho políčka. Uvažujme štvorčekovú sieť rozmerov $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ s jedným políčkom zafarbeným načierno. Ukážeme, že ju vieme vydláždiť podľa zadania.

Rozdeľme si sieť na štyri menšie štvorčekové siete rozmeru $2^k \times 2^k$. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že čierne políčko sa nachádza v ľavej hornej štvrtine. V každej zo zvyšných troch štvrtín zafarbime na čierno jedno rohové políčko, ktoré susedí s dvomi inými štvrtinami. Podľa indukčného predpokladu vieme každú štvrtinu pokryť dlaždicami tvaru L tak, aby každé biele políčko bolo zakryté. Tri čierne políčka v strede vieme zakryť dlaždicou v tvare L. Tým sme celú štvorčekú sieť $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ pokryli dlaždicami okrem daného jedného čierneho políčka.

## Úloha 17

Matematickou indukciou dokážeme, že $2n$ diskov vieme premiestniť z jednej tyče na druhú využitím $2^{n+1} - 2$ ťahov. Pre $n = 0$ nemáme žiadne disky, čiže na vyriešenie hlavolamu nám stačí 0 ťahov. Keďže $2^1 - 2 = 0$, tak bázu máme dokázanú.

Nech $k$ je prirodzené číslo. Prepokladajme, že $2k$ diskov $1, 1, 2, 2, \ldots, k, k$ vieme premiestniť z jednej tyče na druhú na $2^{k+1} - 2$ ťahov (indukčný predpoklad). Dokážeme, že potom vieme aj $2(k+1)$ diskov $1, 1, 2, 2, \ldots, k + 1, k + 1$ premiestniť z jednej tyče na druhú, bez ujmy na všeobecnosti z $A$ na $B$. To spravíme nasledovne:

1. Na základe indukčného predpokladu presunieme disky $1, 1, 2, 2, \ldots, k, k$ z tyče $A$ na tyč $C$ pomocou $2^{k+1} - 2$ ťahov.

2. Presunieme disk jeden disk $k + 1$ z tyče $A$ na tyč $B$ a rovnako aj druhý. Vykonali sme 2 ťahy.

3. Podľa indukčného predpokladu presunieme disky $1, 1, 2, 2, \ldots, k, k$ z tyče $C$ na tyč $B$ pomocou $2^{k+1} - 2$ ťahov.

Všetky vykonané ťahy sú korektné. Disky $k + 1$ nás v krokoch 1. a 3. netrápia, keďže na ne môžeme uložiť všetky ostatné. Ukázali sme tak, že vieme presunúť všetky disky z tyče $A$ na tyč $B$, pričom počet použitých ťahov je

$$(2^{k+1} - 2) + 2 + (2^{k+1} - 2) = 2 \cdot 2^{k+1} - 2 = 2^{(k+1)+1} - 2,$$

čo je presne to, čo sme chceli dokázať. Dôkaz indukciou je tak hotový.

**Poznámka.** V tomto riešení sme vlastne dokazovali silnejšie tvrdenie. Miesto presúvania diskov vyslovene z tyče $A$ na tyč $B$ sme dokazovali, že vieme presúvať medzi ľubovoľnými dvomi tyčami. To je technicky potrebné, keď chceme v indukčnom kroku využiť indukčný predpoklad na presun diskov z tyče $A$ na $C$. Ak máme v indukčnom predpoklade len presun z $A$ na $B$, tak to nemôžeme len tak použiť.

**Bonus.** Spomenutý problém je výrazný, keď sa pustíme do programovania. Matematikcká indukcia zodpovedá rekurzii v programovaní. Teda ak chceme previesť naše riešenie do programu, najpriamejšie bude napísať rekurzívnu funkciu. Ak by sme však išli programovať funkciu `hanoi(n)`, ktorá vypíše postuonosť ťahov presúvajúcu disky z $A$ na $B$, tak tú nebudeme môcť použiť na presun z $A$ na $C$. Preto si funkciu zovšeobecníme tak, že jej pridáme argumenty `start`, `goal`, určujúce z ktorej tyče na ktorú chceme disky presúvať. Takto vieme pridať aj argument `mid` pre zvyšnú tyč – síce sa dá jednoznačne určiť z hodnôt `start`, `goal`, ale je pohodlnejšie sa toho ušetriť.

Budeme teda programovať funkciu `hanoi(n, start, goal, mid)`, ktorá presunie disky $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$ z tyče `start` na tyč `goal` za pomoci tyče `mid`.

```
def hanoi(n, start, goal, mid):
    if n > 0:
        # Presunieme disky 1, 1, 2, 2, ..., n - 1, n - 1 z start na mid
        hanoi(n - 1, start, mid, goal)
        # Presunieme dva disky n z start na goal
        print(start + goal)
        print(start + goal)
        # Presunieme disky 1, 1, 2, 2, ..., n - 1, n - 1 z mid na goal
        hanoi(n - 1, mid, goal, start)

n = int(input())
hanoi(n, 'A', 'B', 'C')
```

**Porovnanie rekurzie a matematickej indukcie.** Na tejto úlohe si môžeme pekne všimnúť súvis medzi rekurziou a matematickou indukciou. Akurát tento program nám nič nehovorí o počte ťahov. Aby sme dokázali, že spraví $2^{n+1} - 1$, tak potrebujeme už matematickú indukciu.

**Kde spraviť bázu?** V úlohe nebolo jasne zadané, pre ktoré $n$ máme tvrdenie dokazovať (či pre $n \geq 0$ alebo pre $n \geq 1$). Náš dôkaz aj program uvažuje $n \geq 0$. Všimnite si, že prípad uvažovanie 0 vôbec nie je problematické. Ak by sme nulu nechceli uvažovať, tak by sem v báze pre $n = 1$ vykonali dva priame ťahy. A program by vyzeral nasledovne:

```
def hanoi(n, start, goal, mid):
    if n == 1:
        print(start + goal)
        print(start + goal)
    else: # Alebo if n > 1:
        # Presunieme disky 1, 1, 2, 2, ..., n - 1, n - 1 z start na mid
        hanoi(n - 1, start, mid, goal)
        # Presunieme dva disky n z start na goal
        print(start + goal)
        print(start + goal)
        # Presunieme disky 1, 1, 2, 2, ..., n - 1, n - 1 z mid na goal
        hanoi(n - 1, mid, goal, start)

n = int(input())
hanoi(n, 'A', 'B', 'C')
```

Dokazovanie pre $n \geq 0$ má výhodu v tom, že báza je jednoduchšia. Aj program je o niečo stručnejší.

## Úloha 18

Dokážeme matematickou indukciou vzhľadom na $n$.

**Báza** . Nech $n = 0$. Potom

$$(1+\sqrt{2})^n = (1+\sqrt{2})^0 = 1 = 0\sqrt{2}+1$$

Teda $a = 0 \in \mathbb{N}$ a $b = 1 \in \mathbb{N}$.

**Indukčný krok** Nech pre $k \in \mathbb{N}$ vieme nájsť $a, b \in \mathbb{N}$ také, že $(1+\sqrt{2})^k = a\sqrt{2}+b$, potom vieme nájsť také $c, d \in \mathbb{N}$, že $(1+\sqrt{2})^{k+1} = c\sqrt{2}+d$.

Potom: $(1+\sqrt{2})^{k+1} = (1+\sqrt{2})^k(1+\sqrt{2}) \overset{\text{IP}}{=} (a\sqrt{2}+b)(1+\sqrt{2}) = a\sqrt{2}+b\sqrt{2}+b+2a = \sqrt{2}(a+b)+2a+b = c\sqrt{2}+d$,
kde $c = a+b$ a $d = 2a+b$.

Na koľko sú prirodzené čísla uzavreté na násobenie a sčitovanie, tak $c, d \in \mathbb{N}$.

## Úloha 19

Na začiatok separátne overíme, že nervnosť platí pre $n = 1$ $(2 < 8)$ a $n = 2$ $(1+1 = 2 < 8 = 16/2)$. Platnosť pre všetky $n \geq 3$ dokážeme matematickou indukciou.

**Báza** Pre $n = 3$ máme $1+1+8/3 = 14/3 < 32/3$, čo platí.

**Indukčný krok** Uvažujme teraz $n \geq 3$ $(n \in \mathbb{N})$ a predpokladajme, že pre toto $n$ platí

$$\frac{2^1}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^n}{n} < \frac{2^{n+2}}{n}. \tag{IP}$$

Dokážeme, že potom platí

$$\frac{2^1}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^n}{n}+\frac{2^{n+1}}{n+1} < \frac{2^{n+3}}{n+1}. \tag{1}$$

Z (IP) vieme, že platí

$$\frac{2^1}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^n}{n}+\frac{2^{n+1}}{n+1} < \frac{2^{n+2}}{n}+\frac{2^{n+1}}{n+1}. \tag{2}$$

Ekvivalentnými úpravami dokážeme, že platí

$$\begin{aligned}
\frac{2^{n+2}}{n}+\frac{2^{n+1}}{n+1} &< \frac{2^{n+3}}{n+1} \qquad |: 2^{n+1} \\
\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1} &< \frac{4}{n+1} \qquad | \cdot n(n+1),\ n(n+1) > 0 \\
2n+2+n &< 4n \\
2 &< n
\end{aligned} \tag{3}$$

Z platnosti (2) a (3) (vďaka tranzitívnosti nerovnosti) dostávame, že platí (1), čo sme chceli dokázať.

**Poznámka.** Nerovnosť (3) stačí dokazovať so symbolom $\leq$, lebo ak $a < b$ a $b \leq c$, tak $a < c$. Potom nemusíme overovať platnosť pre $n = 3$.

## Úloha 22

*Riešenie.* Úlohu dokážeme matematickou indukciou podľa $n$. Pre $n = 1$ máme zjavne $x_1 = 1$ a tvrdenie $x_1 \geq 1$ zjavne platí.

Predpokladajme, že pre nejaké $k \in \mathbb{N}^+$ a pre ľubovoľných $n$ kladných reálnych čísel $y_1, y_2, \ldots, y_k$ so súčinom 1 platí $y_1 + y_2 + \cdots + y_k \geq k$. Nech $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ je nejakých $k+1$ kladných reálnych čísel so súčinom 1. Ukážeme, že platí

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} \geq k + 1.$$

Ak by bolo každé z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ väčšie ako 1 (resp. menšie ako 1), tak by bol ich súčin väčší ako 1 (resp. menší ako 1, čo by bol spor. Preto musí spomedzi čísel $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ existovať jedno, bez ujmy na všeobecnosti nech to je $x_{k+1}$, ktoré je aspoň 1 a jedno, ktoré je najviac jedna, nech to je $x_k$.

Zoberme si $k$ čísel $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k \cdot x_{k+1}$. Súčin týchto čísel je $x_1 x_2 \ldots x_{k-1} x_k x_{k+1} = 1$ a preto podľa indukčného predpokladu platí

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} \geq k$$

a po pripočítaní jednotky platí tiež

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} + 1 \geq k + 1$$

Teraz nám stačí ukázať, že platí

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} + 1. \tag{3}$$

Túto nerovnosť si však vieme ekvivalentne upraviť nasledovne

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} &\geq x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} + 1, \\
x_k + x_{k+1} &\geq x_k x_{k+1} + 1, \\
0 &\geq x_k x_{k+1} - x_k - x_{k+1} + 1, \\
0 &\geq (x_k - 1)(x_{k+1} - 1),
\end{aligned}$$

a to platí, keďže $x_k \leq 1$ (a teda $x_k - 1 \leq 0$) a $x_{k+1} \geq 1$ (a teda $x_{k+1} - 1 \geq 0$).

Tým je dôkaz hotový. Pre lepšiu jasnosť ešte uvedieme, že sme dokázali toto:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} + 1 < k + 1,$$

kde platnosť prvej nerovnosti vyplýva z platnsti (3) a platnosť druhej nerovnosti vyplýva z indukčného predpokladu.