

# Cvičenie 6: Relácie a operácie s nimi

→ **Úloha 1.** Majme reláciu  $M$  z množiny  $\{a, b, c, d\}$  do množiny  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  a reláciu  $N$  na množine  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , ktoré máme zadané nasledovne:

$$M = \{(a, 2), (a, 5), (b, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 5)\},$$

$$N = \{(1, 1), (1, 3), (1, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 5)\}.$$

Ako vieme tieto relácie znázorniť? Vypíšte relácie  $M^{-1}$ ,  $N^{-1}$ ,  $MN$  a  $NM$  (ak existujú).

→ **Úloha 2.** Na množine  $L$  všetkých ľudí, ktorá má rozklad  $\{M, Z\}$  na mužov a ženy, definujeme relácie:

- $D: aDb \Leftrightarrow a$  je dieťaťom  $b$ ,
- $S: aSb \Leftrightarrow a$  je zosobášený(-ná) s  $b$ .

Pomocou relácií  $D$ ,  $S$ , operácií na reláciách a množinových operácií definujte relácie:

- |                   |                    |                  |
|-------------------|--------------------|------------------|
| a) je rodičom, ←  | e) je bratom,      | i) je predkom,   |
| b) je matkou, ←   | f) je svokrou, ←   | j) je príbuzným. |
| c) je dedkom, ←   | g) je ujom,        |                  |
| d) je súrodencom, | h) je sesternicou, |                  |

→ **Úloha 3.** Nech  $D$  a  $E$  sú relácie medzi prvkami množín  $A$  a  $B$ . Dokážte, že  $(D \cap E)^{-1} = D^{-1} \cap E^{-1}$ .

→ **Úloha 4.** Nech  $D$  je relácia medzi prvkami množín  $A$  a  $B$  a nech  $E$  je relácia medzi prvkami množín  $B$  a  $C$ . Dokážte, že potom  $(DE)^{-1} = E^{-1}D^{-1}$ .

**Úloha 5.** Nech  $R$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  sú binárne relácie z  $A$  do  $B$  a  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  binárne relácie z  $B$  do  $C$ . Rozhodnite, či vo všeobecnosti platia nasledovné tvrdenia:

- 
- $R(S_1 \cap S_2) = RS_1 \cap RS_2$
  - $(R_1 \cap R_2)S = R_1S \cap R_2S$
  - $R(S_1 \cup S_2) = RS_1 \cup RS_2$
  - $(R_1 \cup R_2)S = R_1S \cup R_2S$
  - ak  $S_1 \subseteq S_2$ , tak potom  $RS_1 \subseteq RS_2$
  - ak  $R_1 \subseteq R_2$ , tak potom  $R_1S \subseteq R_2S$
  - $R(S_1 - S_2) = RS_1 - RS_2$
  - $(R_1 - R_2)S = R_1S - R_2S$

V prípade, že v niektorom prípade neplatí rovnosť, platí aspoň jedna inklúzia? Platia v c) a d) obrátené implikácie? (Riešenie úlohy si môžete pozrieť v skriptách Olejár, Škoviera na strane 70 (77 v pdf), Veta 4.3).

**Úloha 6.** Dokážte, že pre každú reláciu  $R$  na množine  $M$  platí:

- $R$  je reflexívna práve vtedy, keď  $\text{id}_M \subseteq R$
- $R$  je ireflexívna práve vtedy, keď  $\text{id}_M \cap R = \emptyset$
- $R$  je symetrická práve vtedy, keď  $R^{-1} \subseteq R$
- $R$  je tranzitívna práve vtedy, keď  $RR \subseteq R$
- $R$  je asymetrická práve vtedy, keď  $R \cap R^{-1} = \emptyset$

f)  $R$  je antisymetrická práve vtedy, keď  $R \cap R^{-1} \subseteq \text{id}_M$

Možno v podúlohách a), c), d) a f) nahradiť  $\subseteq$  za  $=$ ?

**Úloha 7.** Nech  $M$  je množina. Zapište množinu všetkých relácií na množine  $M$ .

**Úloha 8.** Uvažujme relácie  $|$  (delí) a  $<$  (menší ako) definované na kladných celých číslach. Nájdite zložené relácie  $<|$  a  $|<$ .

**Úloha 9.** (\*) Uvažujme relácie  $|$  a  $<$  na celých číslach ( $a | b$  znamená, že  $a$  delí  $b$ ). Nájdite zložené relácie  $|<$  a  $<|$ .