Cvičenie 7: Vlastnosti relácií, ekvivalencie, rozklady

Relácia R na množine A je

- *reflecívna*, ak $\forall x \in A\colon xRx$,
- *ireflexívna*, ak $\forall x \in A\colon \neg xRx$,
- *symetrická*, ak $\forall x, y \in A\colon (xRy \Rightarrow yRx)$,
- *tranzitívna*, ak $\forall x, y, z \in A\colon ((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz)$.

Ak je relácia R reflexívna, symetrická a tranzitívna, tak sa nazýva *relácia ekvivalencie*.

Úloha 1. Aké relácie poznáte zo strednej školy? Pre každú z nich určte, či je reflexívna, ireflexívna, symetrická, tranzitívna.

→ **Úloha 2.** Rozhodnite, či relácia R je reflexívna, ireflexívna, symetrická, tranzitívna:

a) $R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ 6 \mid a + b\}$

b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y \geq 1\}$

c) $T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x^2 + 4y^2 < 4xy\}$

d) Relácia U na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in U \Leftrightarrow 47 \in x \cap y$.

e) $V = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ 5 \mid (a - b)\}$.

→ **Úloha 3.** Ktorá relácia z predošlej úlohy je reláciou ekvivalencie? Popíšte rozklad, ktorý indukuje.

→ **Úloha 4.** Dokážte, že pre každé kladné celé číslo d je relácia $\equiv_d$ definovaná na $\mathbb{Z}$ tak, že

$$a \equiv_d b \Leftrightarrow d \mid (a - b),$$

je reláciou ekvivalencie a popíšte rozklad, ktorý indukuje.

Táto relácia sa nazýva *kongruencia* a veľmi často sa využíva v teórii čísel. Dáva do vzťahu práve také čísla, ktoré majú rovnaký zvyšok po delení číslom d. Miesto značenia $a \equiv_d b$ sa skôr používa $a \equiv b \pmod d$ (čítame a je kongruentné s b modulo d). Teda napr. $2 \equiv 47 \pmod 5$, $12 \equiv 0 \pmod 2$, $22 \equiv 50 \pmod 7$.

Úloha 5. Dokážte, že relácia

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y \in Z\}$$

je reláciou ekvivalencie a popíšte rozklad, ktorý indukuje.

→ **Úloha 6.** Dokážte, že relácia

$$R = \left\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ \exists k \in \mathbb{Z}\colon \frac{a}{b} = 2^k\right\}$$

je reláciou ekvivalencie a popíšte rozklad, ktorý indukuje.

→ **Úloha 7.** Koľko je všetkých relácií ekvivalencie na štvorprvkovej množine? Koľko je ich na päťprvkovej množine?

Úloha 8. Dokážte, že ak R je tranzitívna relácia, tak aj R^{-1} je tranzitívna relácia.

→ **Úloha 9.** Nech R a S sú relácie ekvivalencie na množine M. Uvažujme nasledovné relácie

a) $R \cup S$, b) $R \cap S$, c) $R - S$, d) RS, e) R^{-1}.

Pre každú z podúloh nájdite príklad relácií R, S kedy výsledná relácia je opäť reláciou ekvivalencie; a taktiež príklad relácií R, S, kedy výsledná relácia nie je reláciou ekvivalencie. V prípade, že také relácie R, S nemožno nájsť, dokážte prečo.

Úloha 10. Nech R a S sú tranzitívne relácie. Čo viete povedať o tranzitívnosti relácií

a) $R \cap S$, b) $R \cup S$, c) $R - S$, d) RS, e) R^{-1}?

Musia byť vždy tranzitívne? Môžu byť pre niektoré voľby R, S tranzitívne a inokedy nie? Nebudú nikdy tranzitívne?

Úloha 11. Rozhodnite, či relácia R je reflexívna, ireflexívna, symetrická, tranzitívna (do pozornosti dávame hlavne úlohy po i)):

a) Relácia R na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ taká, že $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow ac = bd$

b) Relácia R na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ taká, že $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow ad = bc$

c) $| = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ (\exists k \in \mathbb{Z})(b = k \cdot a)\}$

d) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ \sin x = \sin y\}$

e) $R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ 7 \mid a+b\}$

f) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x,y) \in P \Leftrightarrow x \cap y = \mathbb{Z}$.

g) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x,y) \in P \Leftrightarrow x \cup y = \mathbb{Z}$.

h) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x,y) \in P \Leftrightarrow x \cap y = \emptyset$.

i) Relácia P na $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$, taká že $(A,B) \in P \Leftrightarrow |A| = |B|$, kde $|M|$ označuje počet prvkov (konečnej) množiny M.

j) $S = \{(r,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ |r+s| = |3+r-s|\}$

k) $T = \{(r,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ |r+s| = |3+r-s|\}$

l) $R = \{(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ c-d = 4\}$

m) $R = \{(c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ (cd+100)(cd-60) = 0\}$

n) $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ |x+y||x-y| \leq 3\}$

o) $R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ (|a+b|-24)(|a-b|-24) = 0\}$

p) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x-y \in \langle -1, 1\rangle\}$

q) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x-y \in \langle 0, 1\rangle\}$

r) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x^2 = 2y^2\}$

s) Relácia R na $\mathbb{N}$ taká, že $(x,y) \in R \Leftrightarrow x = 2^y$

t) Relácia R na $\mathbb{R}$ taká, že $(x,y) \in R \Leftrightarrow x + y \leq 100$

u) Relácia R na $\mathbb{R}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow |x| \leq |y|$.

v) Relácia R na $\mathbb{R}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.

w) Relácia R na $\mathbb{N}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow 3 \mid x^2 + y^2$

Úloha 12. Ktoré z relácií z úlohy 11 sú reláciami ekvivalencie? Aký rozklad určujú?

Úloha 13. (*) Nech M je množina a $\mathcal{R}$ je množina všetkých relácií na množine M. Je $\mathcal{R}$ s operáciou $\circ$ skladania relácií grupa? Je skladanie relácií komutatívne?

Úloha 14. Nech W je neprázdny systém relácií ekvivalencie na množine X. Dokážte, že aj $\bigcap_{R \in W} R$ je relácia ekvivalencie na množine X.