Cvičenie 10: uzávery relácií

→ **Úloha 1.** Nech

$$R = \{(0,0),(0,4),(1,5),(3,2),(3,3),(3,4),(3,6),(5,7),(7,1)\}$$

je relácia na množine $M = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Určte symetrizáciu relácie R, jej tranzitívny uzáver (R^+) a reflexívno-tranzitívny uzáver (R^*).

→ **Úloha 2.** Nech $R = \{(k, k+4);\ k \in \mathbb{N}^+\}$. Nájdite relácie R^n a R^*.

Úloha 3. (*) Pomocou formálneho matematického jazyka vyjadrite, že:

a) Hanojské veže možno vyriešiť;

b) Hanojské veže možno vyriešiť na presne $2^n - 1$ ťahov;

c) Hanojské veže možno vyriešiť na $2^n - 1$ alebo menej ťahov.

Hanojské veže je hlavolam, ktorý sa skladá z troch tyčí (veží) a n diskov (s dierou uprostred) rôznych veľkostí. Na začiatku sú všetky disky uložené na jednej veži. V jednom ťahu môžeme presunúť najvrchnejší disk z jednej veže a položiť ho na vrch druhej veže. Po celý čas musíme dodržať pravidlo, že väčší disk nemôže byť položený na menší disk. Cieľom hlavolamu je presunúť všetky disky z jednej tyče na druhú tyč.

Úloha 4. Nech D je relácia na X. Dokážte, že

a) $D^+ = D \cup D^2 \cup D^3 \cup \dots$ je najmenšia tranzitívna relácia na množine X obsahujúca D. (*tranzitívny uzáver*)

b) $D^* = D^0 \cup D \cup D^2 \cup D^3 \cup \dots$ je najmenšia reflexívna a tranzitívna relácia na množine X. (*reflexívno-tranzitívny uzáver*)

c) $D^\pm = D \cup D^{-1}$ je najmenšia symetrická relácia na X obsahujúca D, t. j. ak T je symetrická relácia na X obsahujúca D, tak $D \cup D^{-1} \subseteq T$. (*symetrický uzáver*)

d) $D \cap D^{-1}$ je najväčšia symetrická relácia na X obsiahnutá v D.

Poznámka. Pod pojmom najmenšia relácia s nejakou vlastnosťou, myslíme najmenšia vzhľadom na usporiadanie podľa inklúzie. Bližšie vysvetlenie je v úlohe c).