# Cvičenie 11: zobrazenia

**Úloha 1.** Nech $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Pre nasledovné relácie určte, ako vyzerá ich prvá projekcia a zistite, či sú zobrazením $M \to M$:

a) $a = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 3), (4, 2)\}$

b) $b = \{(1, 2), (3, 3), (4, 2)\}$

c) $c = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 2)\}$

→ **Úloha 2.** Uvažujme zobrazenie $f \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dané predpisom

$$f(x) = 3 + \frac{8}{2x + 4}.$$

Je zobrazenie injektívne? Je surjektívne? Nájdite množinu $B$ tak, aby zobrazenie $g \colon \mathbb{R}^+ \to B$ s rovnakým predpisom bolo bijekciou.

**Úloha 3.** Zistite, či nasledovné zobrazenia sú injekcie, surjekcie a bijekcie:

→ a) $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f((a, b)) = a^2 + b$

→ b) $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ f(n) = (2n + 3, n^2 + 7)$

→ c) $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f((a, b)) = 2^a 3^b$

→ d) $f \colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ f(A) = A \cup \{47\}$

e) $f \colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q},\ f((a, b)) = (3b + 5, 2a - 3)$

f) $f \colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q},\ f((a, b)) = (a + b, a - b)$

g) $f \colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ f(A) = \mathbb{N} - A$

h) $f \colon \mathcal{P}(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}) \to \mathbb{N},\ f(A) = \sum_{x \in A} x$

i) $f \colon \mathcal{P}(\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}) \to \mathbb{N},\ f(A) = \sum_{x \in A} x$

j) $f \colon \mathcal{P}(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}) \to \{0, 1, \ldots, 15\},\ f(A) = \sum_{x \in A} x$

→ **Úloha 4.** Dokážte, že

a) zloženie dvoch injekcií je injekcia;

b) zloženie dvoch surjekcií je surjekcia;

c) zloženie dvoch bijekcií je bijekcia;

→ **Úloha 5.** Kedy je zobrazenie na nejakej množine $M$ symetrická relácia?

→ **Úloha 6.** Nech $f$ je injektívne zobrazenie z množiny $A$ do množiny $B$. Nájdite injektívne zobrazenie z $\mathcal{P}(A)$ do $\mathcal{P}(B)$.

→ **Úloha 7.** Nájdite bijekciu medzi množinami

a) $\mathbb{N}$ a $\{n \in \mathbb{N};\ n \geq 47\}$

b) $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N} \times \{0, 1, 2\}$

c) $\mathbb{N}$ a množina všetkých konečných postupností núl a jednotiek.

d) $\mathbb{N}$ a množina slov z písmen anglickej abecedy

e) $\langle 17, 42) $ a $(-47, 15\rangle$

f) $(0, 1)$ a $(0, \infty)$

g) $(0, 1)$ a $\langle 0, 1)$

**Úloha 8.** Nech $f_1\colon A_1 \to B_1$ a $f_2\colon A_2 \to B_2$ sú bijekcia a $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Dokážte, že $f_1 \cup f_2$ je bijekcia $A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2$.

**Úloha 9.** Nech $I$ je ľubovoľná množina indexov, $\{A_i;\ i \in I\}$ je rozklad množiny $A$ a $\{B_i;\ i \in I\}$ je rozklad množiny $B$. Nech pre každé $i \in I$ existuje bijekcia $f_i\colon A_i \to B_i$. Dokážte, že potom $\bigcup_{i \in I} f_i$ je bijekcia z $A$ do $B$.