Cvičenie 2: kvantifikátory

Úloha 1. Máme výrokovú formu $p(x)$ definovanú na univerze $\mathbb{Z}$. Ako zapíšeme výroky „$p(x)$ platí pre všetky prirodzené čísla x." a „existuje prirodzené číslo x, pre ktoré platí $p(x)$"?

Úloha 2. Aký význam budú mať výroky $(\forall x)a(x)$, $(\exists x)a(x)$ ak sú definované na a) jednoprvkovej b) prázdnej množine?

Úloha 3. Určte, o čom hovoria nasledujúce výroky, určte ich pravdivostnú hodnotu a znegujte ich. (Pokiaľ nie je napísané ináč, výrokové formy sú definované na univerze $M = \mathbb{Z}$.)

a) $(\exists x)(x \in \mathbb{N})$

b) $(\exists x)(x \in \mathbb{N} \wedge x > 5)$

c) $(\forall x)(x^2 > 0)$

d) $(\exists x)(x \bmod 2 = 0 \vee x \bmod 2 = 1)$

e) $(\forall x)(x \bmod 2 = 0 \vee x \bmod 2 = 1)$

f) $(\exists x)(x \bmod 2 = 0 \wedge x \bmod 2 = 1)$

g) $(\exists x)(x = 5) \Rightarrow (\forall y)(y = 5)$

h) $(\exists x)(x = 5) \Rightarrow (\forall x)(x = 5)$

i) $(\forall x)(\forall y)[(x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow (x \cdot y > 0)]$

j) $(\forall a)(\forall b)[(a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q} \wedge a \neq b) \Rightarrow (\exists c)(c \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \wedge a < c < b)]$, univerzum: $M = \mathbb{R}$.

k) $(\forall a)(\forall b)[(a \notin \mathbb{Q} \wedge b > 0) \Rightarrow (\exists c)(c \in \mathbb{Q} \wedge |a - c| < b)]$, univerzum: $M = \mathbb{R}$.

l) $(\forall a)(\forall b)[(a \in \mathbb{N}^+ \wedge b \in \mathbb{N}^+) \Rightarrow (\exists c)(c \neq 0 \wedge a^2 - 2b^2 = c)]$

m) $(\forall a)[a \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow (\exists b)[b \in \mathbb{N} \wedge (\forall c)((c \in \mathbb{N} \wedge c > b) \Rightarrow c^a < 2^c)]]$

Úloha 4. Zostavte výrokové formy, ktoré budú hovoriť nasledovné:

a) $e(a)$: a je párne číslo

b) $d \mid a$: číslo a je deliteľné číslom d.

c) $a \bmod d = z$: a dáva zvyšok z po delení číslom d

d) $p(x)$: x je prvočíslo

Poznámka. Premenné použité v týchto výrokových formách môžu byť väčšinou brané len z niektorých množín (napr. celé čísla). Tieto zamlčané podmienky si doplňte podľa toho, ako sú známe.

Úloha 5. Zapíšte nasledovné výroky (môžete používať výrokové formy z predchádzajúcej úlohy):

a) Každé číslo deliteľné desiatimi je deliteľné aj dvomi.

b) Žiadne prvočíslo nie je párne.

c) Existuje práve jedno párne celé číslo.

d) Medzi ľubovoľnými dvomi racionálnymi číslami je nejaké iracionálne.

e) Prvočísel je nekonečne veľa.

f) Pre každé celé čísla a, d ($d \neq 0$) vieme jednoznačne určiť zvyšok čísla a po delení číslom d.

Úloha 6. Zistite, či nasledovné výroky sú tautológie:

a) $(\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)a(x)$

b) $(\exists x)a(x) \Rightarrow (\forall x)a(x)$

c) $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))$

d) $((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)) \Rightarrow (\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x))$

e) $(\exists x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)b(x))$

f) $((\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)b(x)) \Rightarrow (\exists x)(a(x) \Rightarrow b(x))$

Úloha 7. Výrok s „klasickým" použitím kvantifikátorov $(\forall a \in A)(\exists b \in B)p(a,b)$ chceme ekvivalentne prepísať na „formálne" použitie kvantifikátorov. Môžeme to spraviť takto $(\forall a)(\exists b)[a \in A \Rightarrow (b \in B \wedge p(a,b))]$?