Cvičenie 3: dôkazy

Úloha 1. Dokážte, že nasledovné tvrdenia sú tautológie

a) $[(A \Rightarrow B) \wedge (C \vee D) \wedge ((\neg A \wedge C) \Rightarrow E)] \Rightarrow [\neg B \Rightarrow (E \vee D)]$,

b) $[(\neg A \Rightarrow B) \vee (C \wedge D) \vee (E \wedge \neg C \wedge A)] \Rightarrow [(\neg B \wedge \neg C) \Rightarrow A]$,

c) $[(A \Rightarrow B) \wedge (\neg B \vee C)] \Rightarrow [((C \Rightarrow D) \wedge A) \Rightarrow D]$.

Úloha 2. Zistite, či nasledovné výroky sú tautológie. Ak áno, dokážte ich platnosť. Ak nie, nájdite kontrapríklad.

a) $(\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)a(x)$

b) $(\exists x)a(x) \Rightarrow (\forall x)a(x)$

c) $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))$

d) $((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)) \Rightarrow (\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x))$

e) $(\exists x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)b(x))$

f) $((\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)b(x)) \Rightarrow (\exists x)(a(x) \Rightarrow b(x))$

Úloha 3. Dokážte nasledovné tvrdenia:

a) $(\forall n \in \mathbb{N})(7 \nmid 47n \Rightarrow 7 \nmid n)$

b) $(\forall a,\, b \in \mathbb{R}_0^+)\left(\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\right)$

c) $(\forall a,\, b \in \mathbb{N})[(22 \mid a \wedge 33 \mid b) \Rightarrow 11 \mid (a+b)]$

d) $\log_2 3$ je iracionálne číslo.

e) $(\forall n \in \mathbb{N})(5 \mid n^2+1 \Rightarrow 10 \nmid n)$

f) Ak prirodzené číslo n nie je deliteľné tromi, tak n^2 dáva po delení tromi zvyšok 1.

g) $(\forall a,\, b \in \mathbb{N})[(a \bmod 7 = 4 \wedge b \bmod 7 = 5) \Rightarrow ab \bmod 7 = 6]$

h) Ak súčet reálnych čísel a, b, c, d, e je nula, tak aspoň jedno z nich je nezáporné.

i) Súčet tretích mocnín troch za sebou idúcich čísel je deliteľný deviatimi.

j) $(\forall a,\, b \in \mathbb{R}^+)\left(\dfrac{a+b}{2} \leq \dfrac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}\right)$

Úloha 4. Dokážte, že pre každé prvočíslo p je $\sqrt{p}$ iracionálne číslo.

Úloha 5. Dokážte, že ak existuje nekonečne veľa prvočísel p, pre ktoré je aj $p+2$ prvočíslo, tak potom existuje nekonečne veľa prvočísel p, pre ktoré je $p+2$ prvočíslo a navyše $p+1$ je deliteľné 6-timi.

Úloha 6. Dokážte, že prvočísel je nekonečne veľa.

Úloha 7. Dokážte, že ak a, b sú racionálne čísla, tak aj $a \cdot b$ je racionálne číslo.

Úloha 8. Dokážte, že ak súčin dvoch reálnych čísel x a y je iracionálne číslo, musí byť aspoň jedno z čísel x a y iracionálne.

Úloha 9. Dokážte, že ak $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ pre nejaké racionálne čísla a, b, tak aj $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, aj $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

Úloha 10. Nech a, b sú kladné celé čísla opačnej parity. Dokážte, že ak nemožno krátiť zlomok $\dfrac{a}{b}$, tak nemožno krátiť ani zlomok $\dfrac{a-b}{a+b}$.

Úloha 11. Máme reálne čísla a, b, c také, že čísla

$$\frac{1}{b+c}, \qquad \frac{1}{c+a}, \qquad \frac{1}{a+b}$$

tvoria aritmetickú postupnosť. Dokážte, že aj čísla a^2, b^2, c^2 tvoria aritmetickú postupnosť.

Úloha 12. Dokážte, že ak x, y sú celé čísla pre ktoré platí $31 \mid 6x + 11y$, potom aj $31 \mid x + y$.

Úloha 13. Nech a, b, c sú reálne čísla, pre ktoré platí $a + b + c = 0$. Dokážte, že

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = -3.$$

Úloha 14. Dokážte, že ak existuje nekonečne veľa palindromických prvočísel (čítajú sa rovnako spredu aj odzadu), tak existuje aj nekonečne veľa palindromických prvočísel, ktoré majú nepárny počet cifier.

Úloha 15. Dokážte, že neexistuje mnohočlen $f(x)$ s celočíselnými koeficientmi, pre ktorý by platilo $f(7) = 11$ a $f(11) = 13$.

Úloha 16. Dokážte, že ak e (eulerova konštanta) nie je riešením polynomiálnej rovnice s celočíselnými koeficientmi, tak ani $2e$ nie je.

Úloha 17. Je číslo $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ racionálne?