Cvičenie 4: matematická indukcia

Úlohy na cvičenie

Úloha 1. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Ďalšie úlohy na dokazovanie súčtov nájdete v `http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~rajnik/udds/zbierka.pdf`, str. 10.

Úloha 2. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré platí

a) $2^n \geq n - 2$,

b) $n^2 \leq 2^n$.

Úloha 3. V rovine je rozmiestnených n kružníc, z ktorých každá pretína všetky ostatné. Dokážte, že oblasti roviny, ktoré tieto kružnice vyčleňujú, možno ofarbiť dvoma farbami tak, aby žiadne dve susedné oblasti nemali rovnakú farbu. Oblasti, ktoré majú spoločné len niektoré body, nepovažujeme za susedné.

Úloha 4. Na stole máme v rade n mincí zľava doprava, ktoré môžu byť ľubovoľne otočené (buď lícom nadol, alebo nahor). V jednom ťahu môžeme zobrať niekoľko prvých mincí zľava a každú z nich otočiť. Dokážte, že môžeme naše ťahy voliť tak, aby sme po nejakom čase mali všetky mince otočené lícom nahor.

Úloha 5. V bani s neobmedzeným množstvom poschodí, ktoré sú zhora nadol očíslované $-1, -2, -3, \ldots$, pracuje niekoľko (konečne veľa) trpaslíkov. Každý deň, v rovnakom čase, z každého poschodia, na ktorom sa nachádzajú aspoň dvaja trpaslíci, sa práve jeden trpaslík presunie nadol o toľko poschodí, koľko kolegov mal v ten deň na svojom poschodí. Dokážte, že po určitom (konečnom) počte dní bude na každom poschodí najviac jeden trpaslík.

Úloha 6. *Hanojské veže* je hlavolam, ktorý sa skladá z troch tyčí (veží) a n diskov (s dierou uprostred) rôznych veľkostí. Na začiatku sú všetky disky uložené na jednej veži. V jednom ťahu môžeme presunúť najvrchnejší disk z jednej veže a položiť ho na vrch druhej veže. Po celý čas musíme dodržať pravidlo, že väčší disk nemôže byť položený na menší disk. Cieľom hlavolamu je presunúť všetky disky z jednej tyče na druhú tyč. Dokážte, že tento hlavolam možno vyriešiť pomocou $2^n - 1$ ťahov.

Úloha 7. Dokážte, že políčka tabuľky $2^n \times 2^n$ možno zafarbiť bielou a čiernou farbou tak, že keď si zoberieme ľubovoľné dve riadky, tak sa budú na polovici miest zhodovať a na zvyšnej polovici miest líšiť.

Úloha 8. Dokážte, že pre ľubovoľných n reálnych čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, z ktorých je každé aspoň 1 platí

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n - 1 + a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Ďalšie úlohy na precvičovanie

Úloha 9. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí:

a) $3 \mid n^3 - n$,

b) $5 \mid n^5 - n$,

c) $31 \mid 5^{n+1} + 6^{2n-1}$,

d) $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

Úloha 10. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré platí

a) $n! > 2^n$,

b) $2n < 3^n$,

c) $3^n + 4^n \geq 5^n$,

d) $2^n \geq 20n$,

e) $3^n < n!$,

f) $(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$.

Náročnejšie úlohy

Úloha 11. Nech $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, \ldots$ sú fibonacciho čísla. Dokážte, že pre ľubovoľné $n \geq 1$ platí:

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - F_1$$

Úloha 12. Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je n kladných reálnych číslel. Dokážte, že

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq n - 1 + \prod_{i=1}^{n} \max(1, a_i),$$

teda

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n - 1 + \max(1, a_1) \max(1, a_2) \cdots \max(1, a_n).$$

Úloha 13. Dokážte, že pre ľubovoľných n kladných reálnych čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ so súčinom 1 platí

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n.$$

Úloha 14. Dokážte, že pre ľubovoľných n kladných reálnych čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí nerovnosť

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Úloha 15. Dokážte, že pre každé prvočíslo p a každé prirodzené číslo n platí $p \mid n^p - n$.

Úloha 16. Turnaja sa zúčastnilo n tímov. Každá (neusporiadaná) dvojica tímov odohrala práve jeden zápas. Každý zápas sa skončil výhrou niektorého tímu. Dokáže, že tímy možno zoradiť do postupnosti $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tak, že tím t_1 vyhral nad tímom t_2, tím t_2 nad t_3 a tak ďalej až tím t_{n-1} vyhral nad tímom t_n.

Úloha 17. Nech x je reálne číslo a $x + \frac{1}{x}$ je celé číslo. Dokážte, že potom aj $x^n + x^{-n}$ je celé číslo pre všetky prirodzené čísla n.