Cvičenie 5: množiny

Úloha 1. Nech $A = \{a, b, \{\emptyset\}, \emptyset\}$

- Koľko prvkov má množina A?
- Čo platí? $A \in A, \quad A \subseteq A, \quad \emptyset \in A, \quad \{a, b\} \in A, \quad \{a, b\} \subseteq A$

Úloha 2. Dokážte identity:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $(A - C) - (B - C) = A - (B \cup C)$

Úloha 3. Zostrojte potenčnú množinu $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$

Úloha 4. Zistite, v akom vzťahu (rovnosť / inklúzia / žiaden) sú množiny:

a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(A \cap B)$

b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(A \cup B)$

Úloha 5. Dokážte, že nasledovné tri podmienky sú ekvivalentné:

(i) $A \subseteq B$,

(ii) $A \cup B = B$,

(iii) $A \dot{-} B = B - A$.

Úloha 6. Dokážte, že $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ sa dá pre $n \geq 2$ vyjadriť ako:

a) $A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - (A_1 \cup A_2)) \cup \cdots \cup (A_n - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}))$

b) $(A_1 - A_2) \cup \cdots \cup (A_{n-1} - A_n) \cup (A_n - A_1) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$

Úloha 7. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C platia identity:

a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,

b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,

c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

Úloha 8. Nech A, B, C sú množiny.

a) Dokážte, že ak $A \subseteq B$, tak $A \times C \subseteq B \times C$.

b) Ako sa zmenení výsledok z a), ak namiesto $\subseteq$ píšeme $\subsetneq$?

c) Platí aj opačná implikácia?

Úloha 9. Dokážte, že množiny A a B sú disjunktné práve vtedy, keď $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$.