

## Cvičenie 8: uzávery relácií

**Úloha 1.** Anička si na tabuľu napísala číslo 1. V jednom kroku môže Anička spraviť jeden z nasledujúcich ťahov

- Zmaže číslo na tabuli a nahradí ho číslom o 4 väčším.
  - Pokiaľ je číslo na tabuli deliteľné tromi, tak ho zmaže a nahradí ho 3-krát menším číslom.
- a) Opíšte situáciu s úlohy pomocou relácie. Definujte reláciu, ktorá bude vyjadrovať, z ktorého čísla môže Anička dostať ktoré v jednom kroku.
- b) Pomocou vami definovanej relácie zapíšte množinu všetkých čísel, ktoré vie Anička dostať na tabuli po konečnom počte krokov, ak začína s jednotkou (iba definujte množinu podľa tohto opisu).
- c) Vyjadrite, o akú množinu ide a formálne dokážte svoje tvrdenie.

**Úloha 2.** Nech  $D$  je relácia na  $X$ . Dokážte, že

- a)  $D^+$  je najmenšia tranzitívna relácia na množine  $X$  obsahujúca  $D$ .
- b)  $D^*$  je najmenšia reflexívna a tranzitívna relácia na množine  $X$ .
- c)  $D \cup D^{-1}$  je najmenšia symetrická relácia na  $X$  obsahujúca  $D$ , t. j. ak  $T$  je symetrická relácia na  $X$  obsahujúca  $D$ , tak  $D \cup D^{-1} \subseteq T$ .
- d)  $D \cap D^{-1}$  je najväčšia symetrická relácia na  $X$  obsiahnutá v  $D$ .

*Poznámka.* Pod pojmom najmenšia relácia s nejakou vlastnosťou, myslíme najmenšia vzhľadom na inklúziu. Bližšie vysvetlenie je v úlohe c).

**Úloha 3.** Koľko je všetkých relácií ekvivalencie na štvorprvkovej množine? Koľko je ich na päťprvkovej množine?

**Úloha 4.** Nech  $W$  je neprázdny systém relácií ekvivalencie na množine  $X$ . Dokážte, že aj  $\bigcap_{R \in W} R$  je relácia ekvivalencie na množine  $X$ .

**Úloha 5.** Nech  $R = \{(k, k + 4); k \in \mathbb{N}^+\}$ . Nájdite  $R^*$ .