Cvičenie 9: usporiadania

Úloha 1. Pri každú z nasledovných relácií určte, či je reflexívna, antisymetrická, tranzitívna, dichotomická. Určite, či sú usporiadaním, resp. úplným usporiadaním. Ak áno, určte ich minimálne, maximálne, najmenšie a najväčšie prvky.

a) $\mid\, = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ (\exists k \in \mathbb{Z})(ka = b)\}$

b) $\emptyset$ (na množine M)

c) $M \times M$ (na množine M)

d) R^{-1}, R je ľubovoľné úplné (totálne) usporiadanie

e) Každá príšera má svoj útok a obranu, čo sú dve prirodzené čísla. Hovoríme, že jedna príšera *poráža* druhú, pokiaľ má aj útok, aj obranu aspoň takú, ako druhá príšera. Formálne definujte príšeru a reláciu poráža a určte vlastnosti tejto relácie ako v zadaní.

f) $R = \{(A,B) \in \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M);\ A \subseteq B\}$

g) $S_1 = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2;\ a+b \leq c+d\}$

h) $S_2 = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2;\ a+b < c+d\}$

i) $S_3 = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2;\ a+b < c+d \vee (a,b) = (c,d)\}$

Úloha 2. Nech M je množina takých podmnožín množiny $\{1,2,\dots,20\}$, ktoré obsahujú len po dvoch nesúdeliteľné čísla, teda

$$M = \{X \in \mathcal{P}(\{1,2,\dots,20\});\ (\forall a,b \in X)(a \neq b \Rightarrow \mathrm{NSD}(a,b) = 1\}.$$

Dokážte, že $\subseteq$ je usporiadaním na množine M. Nech A, B sú dva maximálne prvky. Musí nutne platiť, že $|A| = |B|$, teda, že A a B majú rovnaký počet prvkov?

Úloha 3. Nech φ je neprázdny systém usporiadaní množiny A. Dokážte, že potom aj $\bigcap \varphi$ je usporiadanie množiny A. Platí podobné tvrdenie aj pre neprázdny systém úplných usporiadaní na množine A?

Úloha 4. Nech φ, τ sú dva rozklady na množine $X \neq \emptyset$. Hovoríme, že $\varphi \leq \tau$ (alebo, že rozklad φ je menší alebo rovný ako τ), ak ku každej množine $M \in \varphi$ existuje taká množina $P \in \tau$, že $M \subseteq P$. Dokážte, že $\leq$ je usporiadanie systému všetkých rozkladov množiny M.

Úloha 5. Pre zadané nezáporné celé čísla m, n nájdite usporiadanú množinu, ktorá bude mať n maximálnych a m minimálnych prvkov.

Úloha 6. (*) Možno na množine $\mathbb{N}^2$ definovať úplné usporiadanie?