

2. sada domácich úloh

Termín odovzdania **22. 12. 23:59**

Úloha 1. (2 body) Nech $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \sin(x) = \sin(y)\}$. Dokážte, že S je reláciou ekvivalencie na \mathbb{R} a dostatočne presne opíšte rozklad, ktorý indukuje.

Úloha 2. (2 body) Nech

$$\preceq = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2; (\exists k \in \mathbb{N})(c = ka \wedge d = kb)\}.$$

Dokážte, že \preceq je reláciou usporiadania na $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a nájdite všetky jej minimálne, maximálne, najväčšie a najmenšie prvky.

Úloha 3. (2 body) Porovnajte mohutosti množín $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Bonus 1. (3 body) Nech R je reflexívna a tranzitívna relácia na množine A . Dokážte, že relácia $R \cap R^{-1}$ je reláciou ekvivalencie na A . Označme \mathcal{S} rozklad množiny A indukovaný reláciou $R \cap R^{-1}$ a definujme na rozklade \mathcal{S} reláciu

$$\preceq = \{(X, Y) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}; (\exists x \in X)(\exists y \in Y)xRy\}.$$

Dokážte, že \preceq je usporiadaním na množine \mathcal{S} .

Bonus 2. (2 body) Dokážte, že pre všetky celé čísla $n, m \geq 1$ platí

$$3^{n+m} + n^2 + m^2 > 2^{n+m+2} - 2n(m+2) - 4(m+1).$$

Pravidlá a pokyny

- **Úlohy spisujte samostatne.** Môžete sa o nich rozprávať a môžete si poradiť. Avšak ich spísanie je už na vás. Vaše spísané riešenia nikomu neukazujte.
- Úlohy odovzdajte do **22. 12. 23:59** pomocou Pridelenej úlohy (Assignments) na Microsoft Teams. Nezapudnite kliknúť na tlačidlo Turn in.
- Úlohy odovzdávajte ako **jeden súbor vo formáte pdf**. Je na vás, či napíšete riešenie na počítači alebo na papieri a oskenujete. V prípade, že chcete riešenie fotiť, dajte si pozor, aby bola fotka dostatočne kvalitná a svetlá. Aj fotky / scany odovzdajte ako jeden pdf súbor.
- Do riešenia úlohy zahrňte aj príslušné slovné komentáre, aby bolo z riešenia jasné, čo robíte a ako úlohu rozumiете.
- Pri riešení sa neodvolávajú na úlohy, ktoré sme robili na cvičeniach. Pokiaľ chcete nejaký výsledok z cvičení využiť, doplňte tam jeho dôkaz.