

Cvičenie 2: Kvantifikátory

Úloha 1. Máme výrokovú formu $p(x)$ definovanú na univerze \mathbb{Z} . Ako zapíšeme výroky „ $p(x)$ platí pre všetky prirodzené čísla x .“ a „existuje prirodzené číslo x , pre ktoré platí $p(x)$ “?

Úloha 2. Aký význam budú mať výroky $(\forall x)a(x)$, $(\exists x)a(x)$ ak sú definované na a) jednoprvkovej b) prázdnej množine?

Úloha 3. Určte, o čom hovoria nasledujúce výroky, určte ich pravdivostnú hodnotu a znegujte ich. (Pokiaľ nie je napísané ináč, výrokové formy sú definované na univerze $M = \mathbb{Z}$.)

- $(\exists x)(x \in \mathbb{N})$
- $(\exists x)(x \in \mathbb{N} \wedge x > 5)$
- $(\forall x)(x^2 > 0)$
- $(\exists x)(x \bmod 2 = 0 \vee x \bmod 2 = 1)$
- $(\forall x)(x \bmod 2 = 0 \vee x \bmod 2 = 1)$
- $(\exists x)(x \bmod 2 = 0 \wedge x \bmod 2 = 1)$
- $(\exists x)(x = 5) \Rightarrow (\forall y)(y = 5)$
- $(\exists x)(x = 5) \Rightarrow (\forall x)(x = 5)$
- $(\forall x)(\forall y)[(x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow (x \cdot y > 0)]$
- $(\forall x)(\forall y)(x + y = 0)$
- $(\exists x)(\forall y)(x + y = 0)$
- $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$
- $(\exists x)(\exists y)(x + y = 0)$
- $(\forall a)(\forall b)[(a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q} \wedge a \neq b) \Rightarrow (\exists c)(c \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \wedge a < c < b)]$, univerzum: $M = \mathbb{R}$.
- $(\forall a)(\forall b)[(a \notin \mathbb{Q} \wedge b > 0) \Rightarrow (\exists c)(c \in \mathbb{Q} \wedge |a - c| < b)]$, univerzum: $M = \mathbb{R}$.
- $(\forall a)(\forall b)[(a \in \mathbb{N}^+ \wedge b \in \mathbb{N}^+) \Rightarrow (\exists c)(c \neq 0 \wedge a^2 - 2b^2 = c)]$
- $(\forall a)[a \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow (\exists b)[b \in \mathbb{N} \wedge (\forall c)((c \in \mathbb{N} \wedge c > b) \Rightarrow c^a < 2^c)]]$

Úloha 4. Zostavte výrokové formy, ktoré budú hovoriť nasledovné:

- $e(a)$: a je párne číslo
- $d \mid a$: číslo a je deliteľné číslom d .
- $a \bmod d = z$: a dáva zvyšok z po delení číslom d
- $p(x)$: x je prvočíslo

Poznámka. Premenné použité v týchto výrokových formách môžu byť väčšinou brané len z niektorých množín (napr. celé čísla). Tieto zamlčané podmienky si doplňte podľa toho, ako sú známe.

Úloha 5. Zapište nasledovné výroky (môžete používať výrokové formy z predchádzajúcej úlohy):

- Každé číslo deliteľné desiatimi je deliteľné aj dvomi.
- Žiadne prvočíslo nie je párne.
- Súčet ľubovoľných troch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný tromi.

- d) Súčet nepárnych čísel je nepárny.
- e) Existuje práve jedno párne celé číslo.
- f) Medzi ľubovoľnými dvomi racionálnymi číslami je nejaké iracionálne.
- g) (*) Prvočísel je nekonečne veľa.
- h) (*) Pre každé celé číslo a , d ($d \neq 0$) vieme jednoznačne určiť zvyšok čísla a po delení číslom d .

Úloha 6. Výrok s „klasickým“ použitím kvantifikátorov $(\forall a \in A)(\exists b \in B)p(a, b)$ chceme ekvivalentne prepísať na „formálne“ použitie kvantifikátorov. Môžeme to spraviť takto $(\forall a)(\exists b)[a \in A \Rightarrow (b \in B \wedge p(a, b))]$?