Cvičenie 3: dôkazy

Úloha 1. Dokážte, že platí:

a) $\sqrt{60} > \sqrt{13} + \sqrt{17}$

b) $\sqrt{9 - \sqrt{10}} < \sqrt{9 + \sqrt{10}} - 1$

c) $\sqrt{4} + \sqrt{7} < \sqrt{3} + \sqrt{12}$

d) $\sqrt{60} + \sqrt{\sqrt{47} - \sqrt{46}} > \sqrt{13} + \sqrt{17}$

Úloha 2. Vysvetlite, prečo je nasledovný „dôkaz“ tvrdenia chybný:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &> \sqrt{3}, & &| -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} - \sqrt{3} &> 0, & &|^2 \\ 2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 3 &> 0, & &| +2 \cdot \sqrt{6} \\ 5 &> 2 \cdot \sqrt{6}, & &|^2 \\ 25 &> 24, \end{aligned}$$

a to je pravda. Preto platí $\sqrt{2} > \sqrt{3}$.

Úloha 3. Zistite, či nasledovné výroky sú tautológie.

a) $[(A \Rightarrow B) \wedge (C \vee D) \wedge ((\neg A \wedge C) \Rightarrow E)] \Rightarrow [\neg B \Rightarrow (E \vee D)]$,

b) $[(\neg A \Rightarrow B) \vee (C \wedge D) \vee (E \wedge \neg C \wedge A)] \Rightarrow [(\neg B \wedge \neg C) \Rightarrow A]$,

c) $[(A \Rightarrow B) \wedge (\neg B \vee C)] \Rightarrow [((C \Rightarrow D) \wedge A) \Rightarrow D]$.

Úloha 4. Zistite, či nasledovné výroky sú tautológie. Ak áno, dokážte ich platnosť. Ak nie, nájdite kontrapríklad.

a) $(\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)a(x)$

b) $(\exists x)a(x) \Rightarrow (\forall x)a(x)$

c) $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))$

d) $((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)) \Rightarrow (\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x))$

e) $(\exists x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)b(x))$

f) $((\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)b(x)) \Rightarrow (\exists x)(a(x) \Rightarrow b(x))$

Úloha 5. Dokážte nasledovné tvrdenia:

a) $(\forall n \in \mathbb{N})(7 \nmid 47n \Rightarrow 7 \nmid n)$

b) $(\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+)\left(\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\right)$

c) $(\forall a, b \in \mathbb{N})[(22 \mid a \wedge 33 \mid b) \Rightarrow 11 \mid (a+b)]$

d) $\log_2 3$ je iracionálne číslo.

e) $(\forall n \in \mathbb{N})(5 \mid n^2 + 1 \Rightarrow 10 \nmid n)$

f) Ak prirodzené číslo n nie je deliteľné tromi, tak n^2 dáva po delení tromi zvyšok 1.

g) $(\forall a, b \in \mathbb{N})[(a \bmod 7 = 4 \wedge b \bmod 7 = 5) \Rightarrow ab \bmod 7 = 6]$

h) Ak súčet reálnych čísel a, b, c, d, e je nula, tak aspoň jedno z nich je nezáporné.

i) Súčet tretích mocnín troch za sebou idúcich čísel je deliteľný deviatimi.

j) $(\forall a,\, b \in \mathbb{R}^+) \left(\dfrac{a+b}{2} \leq \dfrac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} \right)$

Úloha 6. Dokážte, že pre každé prvočíslo p je $\sqrt{p}$ iracionálne číslo.

Úloha 7. Dokážte, že ak existuje nekonečne veľa prvočísel p, pre ktoré je aj $p+2$ prvočíslo, tak potom existuje nekonečne veľa prvočísel p, pre ktoré je $p+2$ prvočíslo a navyše $p+1$ je deliteľné 6-timi.

Úloha 8. Dokážte, že prvočísel je nekonečne veľa.

Úloha 9. Dokážte, že ak a, b sú racionálne čísla, tak aj $a \cdot b$ je racionálne číslo.

Úloha 10. Dokážte, že ak súčin dvoch reálnych čísel x a y je iracionálne číslo, musí byť aspoň jedno z čísel x a y iracionálne.

Úloha 11. Dokážte, že ak $\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ pre nejaké racionálne čísla a, b, tak aj $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, aj $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

Úloha 12. Nech a, b sú kladné celé čísla opačnej parity. Dokážte, že ak nemožno krátiť zlomok $\dfrac{a}{b}$, tak nemožno krátiť ani zlomok $\dfrac{a-b}{a+b}$.

Úloha 13. Máme reálne čísla a, b, c také, že čísla

$$\frac{1}{b+c}, \qquad \frac{1}{c+a}, \qquad \frac{1}{a+b}$$

tvoria aritmetickú postupnosť. Dokážte, že aj čísla a^2, b^2, c^2 tvoria aritmetickú postupnosť.

Úloha 14. Dokážte, že ak x, y sú celé čísla pre ktoré platí $31 \mid 6x+11y$, potom aj $31 \mid x+y$.

Úloha 15. Nech a, b, c sú reálne čísla, pre ktoré platí $a+b+c=0$. Dokážte, že

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}=-3.$$

Úloha 16. Dokážte, že ak existuje nekonečne veľa palindromických prvočísel (čítajú sa rovnako spredu aj odzadu), tak existuje aj nekonečne veľa palindromických prvočísel, ktoré majú nepárny počet cifier.

Úloha 17. Dokážte, že neexistuje mnohočlen $f(x)$ s celočíselnými koeficientmi, pre ktorý by platilo $f(7)=11$ a $f(11)=13$.

Úloha 18. Dokážte, že ak e (eulerova konštanta) nie je riešením polynomiálnej rovnice s celočíselnými koeficientmi, tak ani $2e$ nie je.

Úloha 19. Je číslo $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ racionálne?