Cvičenie 7 a 8: relácie

Úloha 1. Majme reláciu M z množiny $\{a, b, c, d\}$ do množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a reláciu N na množine $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, ktoré máme zadané nasledovne:

$$M = \{(a, 2), (a, 5), (b, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 5)\},$$
$$N = \{(1, 1), (1, 3), (1, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 5)\}.$$

Vypíšte relácie M^{-1}, N^{-1}, MN a NM (ak existujú).

Úloha 2. Nech D a E sú relácie medzi prvkami množín A a B. Dokážte, že $(D \cap E)^{-1} = D^{-1} \cap E^{-1}$.

Úloha 3. Na množine L všetkých ľudí, ktorá má rozklad $\{M, Z\}$ na mužov a ženy, definujeme relácie:

- D: $aDb \Leftrightarrow a$ je dieťaťom b,
- S: $aSb \Leftrightarrow a$ je zosobášený(-ná) s b.

Pomocou relácií D, S, operácií na reláciách a množinových operácií definujte relácie:

a) je rodičom,
b) je matkou,
c) je dedkom,
d) je súrodencom,
e) je bratom,
f) je svokrou,
g) je ujom,
h) je sesternicou,
i) je predkom,
j) je príbuzným.

Úloha 4. Nech D je relácia medzi prvkami množín A a B a nech E je relácia medzi prvkami množín B a C. Dokážte, že potom $(DE)^{-1} = E^{-1}D^{-1}$.

Úloha 5. Nech R, R_1, R_2 sú binárne relácie z A do B a S, S_1, S_2 binárne relácie z B do C. Rozhodnite, či vo všeobecnosti platia nasledonvé tvrdenia:

a) $R(S_1 \cup S_2) = RS_1 \cup RS_2$
b) $(R_1 \cup R_2)S = R_1S \cup R_2S$
c) ak $S_1 \subseteq S_2$, tak potom $RS_1 \subseteq RS_2$
d) ak $R_1 \subseteq R_2$, tak potom $R_1S \subseteq R_2S$
e) $R(S_1 \cap S_2) = RS_1 \cap RS_2$
f) $(R_1 \cap R_2)S = R_1S \cap R_2S$
g) $R(S_1 - S_2) = RS_1 - RS_2$
h) $(R_1 - R_2)S = R_1S - R_2S$

V prípade, že v niektorom prípade neplatí rovnosť, platí aspoň jedna inklúzia? Platia v c) a d) obrátené implikácie? (Riešenie úlohy si môžete pozrieť v skriptách Olejár, Škoviera na strane 70 (77 v pdf), Veta 4.3).

Úloha 6. Aké relácie poznáte zo strednej školy? Pre každú z nich určte, či je reflexívna, ireflexívna, symetrická, tranzitívna a atranzitívna.

Úloha 7. Rozhodnite, či relácia R je reflexívna, ireflexívna, symetrická, tranzitívna:

a) $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ (|a + b| - 24)(|a - b| - 24) = 0\}$
b) $R = \{(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ |r + s| = |3 + r - s|\}$
c) $R = \{(r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ |r + s| = |3 + r - s|\}$

d) $R = \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ (cd + 100)(cd - 60) = 0\}$

e) $R = \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ c - d = 4\}$

f) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y \in Z\}$

g) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ |x + y||x - y| \leq 3\}$

h) $| = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ (\exists k \in \mathbb{Z})(b = k \cdot a)\}$

i) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in P \Leftrightarrow x \cap y = \mathbb{Z}$.

j) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in P \Leftrightarrow x \cup y = \mathbb{Z}$.

k) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in P \Leftrightarrow x \cap y = \emptyset$.

l) Relácia R na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ taká, že $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$

m) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in P \Leftrightarrow 47 \in x \cap y$.

n) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y \in \langle 0, 1\rangle\}$

o) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y \in \langle -1, 1\rangle\}$

p) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ \sin x = \sin y\}$

q) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x^2 = 2y^2\}$

r) Relácia R na $\mathbb{N}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow x = 2^y$

s) Relácia R na $\mathbb{R}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow x + y \leq 100$

t) Relácia R na $\mathbb{R}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow |x| \leq |y|$.

u) Relácia R na $\mathbb{R}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.

v) Relácia R na $\mathbb{N}$ taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow 3 \mid x^2 + y^2$

Úloha 8. Dokážte, že ak R je tranzitívna relácia, tak aj R^{-1} je tranzitívna relácia.

Úloha 9. Ktoré z relácií z úlohy 7 sú reláciami ekvivalencie? Aký rozklad určujú?

Úloha 10. Dokážte, že nasledovná relácie je reláciou ekvivalencie

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ 5 \mid (a - b)\}.$$

Aký rozklad určuje? Čo ak by sme číslo 5 zamenili za ľubovoľné iné celé číslo?

Úloha 11. (*) Nech M je množina a $\mathcal{R}$ je množina všetkých relácií na množine M. Je $\mathcal{R}$ s operáciou $\circ$ skladania relácií grupa? Je skladanie relácií komutatívne?

Úloha 12. Koľko je všetkých relácií ekvivalencie na štvorprvkovej množine? Koľko je ich na päťprvkovej množine?

Úloha 13. Nech W je neprázdny systém relácií ekvivalencie na množine X. Dokážte, že aj $\bigcap_{R \in W} R$ je relácia ekvivalencie na množine X.

Úloha 14. Nech $R = \{(k, k + 4);\ k \in \mathbb{N}^+\}$. Nájdite relácie R^n a R^*.

Úloha 15. Nech R a S sú relácie ekvivalencie na množine M. Uvažujme nasledovné relácie

a) $R \cup S$, b) $R \cap S$, c) $R - S$, d) RS, e) R^{-1}.

Pre každú z podúloh nájdite príklad relácií R, S kedy výsledná relácia je opäť reláciou ekvivalencie; a taktiež príklad relácií R, S, kedy výsledná relácia nie je reláciou ekvivalencie. V prípade, že také relácie R, S nemožno nájsť, dokážte prečo.

Úloha 16. Nech R a S sú tranzitívne relácie. Čo viete povedať o tranzitívnosti relácií

a) $R \cap S$, b) $R \cup S$, c) $R - S$, d) RS, e) R^{-1}?

Musia byť vždy tranzitívne? Môžu byť pre niektoré voľby R, S tranzitívne a inokedy nie? Nebudú nikdy tranzitívne?

Úloha 17. Uvažujme relácie $\mid$ (delí) a $<$ (menší ako) definované na kladných celých číslach. Nájdite zložené relácie $<\mid$ a $\mid<$.

Úloha 18. (*) Uvažujme relácie $\mid$ a $<$ na celých číslach ($a \mid b$ znamená, že a delí b). Vyjadrite relácie $\mid<$ a $<\mid$.