Cvičenie 9: usporiadania

Úloha 1. Pri každú z nasledovných relácií určte, či je reflexívna, antisymetrická, tranzitívna, dichotomická. Určite, či sú usporiadaním, resp. úplným usporiadaním. Ak áno, určte ich minimálne, maximálne, najmenšie a najväčšie prvky.

a) $| = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ (\exists k \in \mathbb{Z})(ka = b)\}$

b) $\emptyset$ (na množine M)

c) $M \times M$ (na množine M)

d) Každá príšera má svoj útok a obranu, čo sú dve prirodzené čísla. Hovoríme, že jedna príšera *poráža* druhú, pokiaľ má aj útok, aj obranu aspoň takú, ako druhá príšera. Formálne definujte príšeru a reláciu poráža a určte vlastnosti tejto relácie ako v zadaní.

e) $R = \{(A,B) \in \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M);\ A \subseteq B\}$

f) $S_1 = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2;\ a+b \leq c+d\}$

g) $S_2 = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2;\ a+b < c+d\}$

h) $S_3 = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2;\ a+b < c+d \vee (a,b) = (c,d)\}$

i) R^{-1}, R je ľubovoľné úplné (totálne) usporiadanie

j) $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N};\ 7a \mid b \vee a = b\}$

Úloha 2. Nech R a S sú usporiadania. Čo viete povedať z pohľadu usporiadaní o reláciách

a) $R \cap S$, b) $R \cup S$, c) $R - S$, d) RS, e) R^{-1}?

Musia byť vždy usporiadania? Môžu byť pre niektoré voľby R, S usporiadania a inokedy nie? Nebudú nikdy usporiadania?

Úloha 3. Nech M je množina takých podmnožín množiny $\{1,2,\dots,20\}$, ktoré obsahujú len po dvoch nesúdeliteľné čísla, teda

$$M = \{X \in \mathcal{P}(\{1,2,\dots,20\});\ (\forall a,b \in X)(a \neq b \Rightarrow \mathrm{NSD}(a,b) = 1\}.$$

Dokážte, že $\subseteq$ je usporiadaním na množine M. Nech A, B sú dva maximálne prvky. Musí nutne platiť, že $|A| = |B|$, teda, že A a B majú rovnaký počet prvkov?

Úloha 4. Nech D je relácia na X. Dokážte, že

a) $D^+ = D \cup D^2 \cup D^3 \cup \dots$ je najmenšia tranzitívna relácia na množine X obsahujúca D.

b) $D^* = D^0 \cup D \cup D^2 \cup D^3 \cup \dots$ je najmenšia reflexívna a tranzitívna relácia na množine X.

c) $D^\pm = D \cup D^{-1}$ je najmenšia symetrická relácia na X obsahujúca D, t. j. ak T je symetrická relácia na X obsahujúca D, tak $D \cup D^{-1} \subseteq T$.

d) $D \cap D^{-1}$ je najväčšia symetrická relácia na X obsiahnutá v D.

Poznámka. Pod pojmom najmenšia relácia s nejakou vlastnosťou, myslíme najmenšia vzhľadom na inklúziu. Bližšie vysvetlenie je v úlohe c).

Úloha 5. Nech A, $I \neq \emptyset$ sú množiny a nech pre každé $i \in I$ je φ_i usporiadanie množiny A. Dokážte, že potom aj $\bigcap_{i\in I} \varphi_i$ je usporiadanie množiny A. Čo ak sú φ_i úplné usporiadania?

Poznámka. $\bigcap_{i\in I} \varphi_i = \{x;\ (\forall i \in I)(x \in \varphi_i)\}$

Úloha 6. Nech φ, τ sú dva rozklady na množine $X \neq \emptyset$. Hovoríme, že $\varphi \leq \tau$ (alebo, že rozklad φ je menší alebo rovný ako τ), ak ku každej množine $M \in \varphi$ existuje taká množina $P \in \tau$, že $M \subseteq P$. Dokážte, že $\leq$ je usporiadanie systému všetkých rozkladov množiny M.

Úloha 7. Pre zadané nezáporné celé čísla m, n nájdite usporiadanú množinu, ktorá bude mať n maximálnych a m minimálnych prvkov.

Úloha 8. (*) Možno na množine $\mathbb{N}^2$ definovať úplné usporiadanie?