

Cvičenie 11 a 12: mohutnosti

Úloha 1. Rozhodnite, či nasledovné množiny sú spočítateľné. Je ich mohutnosť rovná mohutnosti \mathbb{N} alebo \mathbb{R} ?

- a) \mathbb{Q}
- b) množina konečných podmnožín prirodzených čísel
- c) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
- d) množina konečných postupností prirodzených čísel (\mathbb{N}^*)
- e) množina nekonečných postupností prirodzených čísel ($\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$)
- f) množina algebraických čísel, teda takých čísel, ktoré sú koreňmi nejakého mnohočlena s celočíselnými koeficientmi (napr. $4/17$, $\sqrt{2}$, i)
- g) ľubovoľná množina disjunktných otvorených intervalov
- h) množina gúľ v priestore
- i) množina všetkých injekcií $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- j) množina všetkých surjekcií $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- k) množina všetkých bijekcií $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- l) množina všetkých involúcií $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (involúcia je také zobrazenie f , pre ktoré platí $f \circ f = id$).

Úloha 2. Dokážte, že množina je nekonečná vtedy a len vtedy, keď je ekvivalentná niektorej svojej vlastnej podmnožine.

Úloha 3. Porovnajte mohutnosti nasledovných množín:

- a) \mathbb{C} a \mathbb{R}
- b) \mathbb{R} a $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (množina funkcií $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

Úloha 4. Dokážte, že kardinálnych čísel je nekonečne veľa