1. sada domácich úloh

Termín odovzdania **piatok 29. 10. 23:59**

Úloha 1. *(1 bod)* O čísle π vieme, že je iracionálne. Dokážte, že číslo

$$\frac{47}{\sqrt[3]{\pi}+42}$$

je iracionálne. Vychádzajte pri tom len z definície racionálnych a iracionálnych čísel. V prípade, že použijete nejaké známe tvrdenie o racionálnych alebo iracionálnych číslach, je potrebné dokázať aj to.

Riešenie. Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že dané číslo možno zapísať ako zlomok p/q pre nejaké $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$. Potom

$$\begin{aligned}
\frac{47}{\sqrt[3]{\pi}+42} &= \frac{p}{q},\\
47q &= p\sqrt[3]{\pi} + 42p,\\
47q - 42p &= p\sqrt[3]{\pi},\\
\frac{47q-42p}{p} &= \sqrt[3]{\pi},\\
\frac{(47q-42p)^3}{p^3} &= \pi.
\end{aligned}$$

Čísla $(47q - 42p)^3$ a p^3 sú celé (na základe toho, že súčin, rozdiel a mocniny celých čísel sú opäť celé čísla), preto je číslo π racionálne, čo je spor.

Úloha 2. *(1,5 boda)* Zistite, či pre ľubovoľné množiny A, B, C platí:

a) $\mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C) \subseteq \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C)$,

b) $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C)$.

Vaše tvrdenia zdôvodnite. Pokiaľ využijete tvrdenie, ktoré nie je v skriptách (teda aj tie, ktoré sme robili na cvičeniach), dokážte aj tie.

Riešenie. Ukážeme, že **a) platí**. Nech teda $X \in \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C)$, potom:

1. $X \in \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C)$ (predpoklad)
2. $X \in \mathcal{P}(A \cap B) \wedge X \notin \mathcal{P}(A \cap C)$ (definícia rozdielu množín)
3. $X \subseteq A \cap B \wedge X \not\subseteq A \cap C$ (definícia potenčnej množiny)
4. $X \subseteq A$
   Dôkaz: Pre každé y platí: $y \in X \overset{X \subseteq A\cap B}{\Rightarrow} y \in A \cap B \Rightarrow y \in A$.
5. $X \not\subseteq C$
   Dôkaz: $X \not\subseteq A \cap C \Rightarrow (\exists z)(z \in X \wedge z \notin A \cap C) \Rightarrow (\exists z)(z \in X \wedge (z \notin A \vee z \notin C))$. Z toho, že $z \in X$ a $X \subseteq A$ máme, že $z \in A$. Preto zo $z \notin A \vee z \notin C$ vypláva $z \notin C$. Teda existuje také z, že $z \in X \wedge z \notin C$, preto $X \not\subseteq C$.
6. $X \subseteq A \wedge X \not\subseteq C$ (4. a 5.)
7. $X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \notin \mathcal{P}(C)$ (definícia potenčnej množiny)
8. $X \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C)$ (definícia rozdielu)

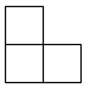
Ukážeme, že **b) neplatí**. Nech $A = \{1\}$ a $B = C = \emptyset$. Potom

$$\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}\} - \{\emptyset\} = \{\{1\}\} \not\subseteq \emptyset = \{\emptyset\} - \{\emptyset\} = \mathcal{P}(\emptyset) - \mathcal{P}(\emptyset) = \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C).$$

Menej poriadne riešenie a) Pri riešení využijeme tvrdenie, že $X \subseteq A \cap B \Leftrightarrow X \subseteq A \wedge X \subseteq B$. Túto ekvivalenciu sme ukázali na 5. cvičeniach pri riešení úlohu 4a). Pokiaľ zadanie bolo formulované len „dokážte“ bez ďalších poznámok, tak by sme nevyžadovali dokázanie tejto ekvivalencie a toto riešenie by bolo za plný počet bodov.

1. $X \in \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C)$ (predpoklad)
2. $X \in \mathcal{P}(A \cap B) \wedge X \notin \mathcal{P}(A \cap C)$ (definícia rozdielu množín)
3. $X \subseteq A \cap B \wedge \neg(X \subseteq A \cap C)$ (definícia potenčnej množiny)
4. $X \subseteq A \wedge X \subseteq B \wedge \neg(X \subseteq A \wedge X \subseteq C)$ (definícia prieniku)
5. $X \subseteq A \wedge X \subseteq B \wedge (X \not\subseteq A \vee X \not\subseteq C)$ (negácia konjunkcie)
6. $X \subseteq A$ (z 5.)
7. $X \not\subseteq A \vee X \not\subseteq C$ (z 5.)
8. $X \not\subseteq C$ (z 6. a 7.)
9. $X \subseteq A \wedge X \not\subseteq C$ (z 6. a 8.)
10. $X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \notin \mathcal{P}(C)$ (definícia potenčnej množiny)
11. $X \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(C)$ (definícia rozdielu)

Úloha 3. *(1,5 boda)* Máme štvorčekovú sieť rozmerov $2^n \times 2^n$ štvorčekov, na ktorej je jedno políčko čierne, zvyšné sú biele. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n a pre každú pozíciu čierneho políčka vieme štvorčekovú sieť vydláždiť dlaždicami v tvare triomina L (ako na obrázku) tak, že sa dlaždice nebudú prekrývať a každé biele políčko bude zakryté dlaždicou. Dlaždice vieme aj otáčať.



Riešenie. **Báza.** Úlohy dokážeme matematickou indukciou. Pre $n = 0$ máme sieť rozmerov 1×1, kde je len jedna možnosť pre čierne políčko. Vtedy je 0 bielych dlaždíc, a teda každá je pokrytá triominom L.

Indukčný krok. Predpokladajme, že štvorčekovú sieť rozmerov $2^k \times 2^k$ vieme vydláždiť podľa zadania pre každú pozíciu čierneho políčka. Uvažujme štvorčekovú sieť rozmerov $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ s jedným políčkom zafarbeným načierno. Ukážeme, že ju vieme vydláždiť podľa zadania.

Rozdeľme si sieť na štyri menšie štvorčekové siete rozmeru $2^k \times 2^k$. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že čierne políčko sa nachádza v ľavej hornej štvrtine. V každej zo zvyšných troch štvrtín zafarbime na čierno jedno rohové políčko, ktoré susedí s dvomi inými štvrtinami. Podľa indukčného predpokladu vieme každú štvrtinu pokryť dlaždicami tvaru L tak, aby každé biele políčko bolo zakryté. Tri čierne políčka v strede vieme zakryť dlaždicou v tvare L. Tým sme celú štvorčekú sieť $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ pokryli dlaždicami okrem daného jedného čierneho políčka.

Úloha 4. *(BONUS, 2 body)* Dokážte, že pre ľubovoľných n kladných reálnych čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ so súčinom 1 platí

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n.$$

Pri dôkaze nevyužívajte známe nerovnosti.

Riešenie. Úlohu dokážeme matematickou indukciou podľa n. Pre $n = 1$ máme zjavne $x_1 = 1$ a tvrdenie $x_1 \geq 1$ zjavne platí.

Predpokladajme, že pre nejaké $k \in \mathbb{N}^+$ a pre ľubovoľných n kladných reálnych čísel $y_1, y_2, \ldots, y_k$ so súčinom 1 platí $y_1 + y_2 + \cdots + y_k \geq k$. Nech $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ je nejakých $k+1$ kladných reálnych čísel so súčinom 1. Ukážeme, že platí

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} \geq k + 1.$$

Ak by bolo každé z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ väčšie ako 1 (resp. menšie ako 1), tak by bol ich súčin väčší ako 1 (resp. menší ako 1, čo by bol spor. Preto musí spomedzi čísel $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ existovať jedno, bez ujmy na všeobecnosti nech to je x_{k+1}, ktoré je aspoň 1 a jedno, ktoré je najviac jedna, nech to je x_k.

Zoberme si k čísel $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k \cdot x_{k+1}$. Súčin týchto čísel je $x_1 x_2 \ldots x_{k-1} x_k x_{k+1} = 1$ a preto podľa indukčného predpokladu platí

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} \geq k$$

a po pripočítaní jednotky platí tiež

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} + 1 \geq k + 1$$

Teraz nám stačí ukázať, že platí

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} + 1. \tag{1}$$

Túto nerovnosť si však vieme ekvivalentne upraviť nasledovne

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} &\geq x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} + 1, \\ x_k + x_{k+1} &\geq x_k x_{k+1} + 1, \\ 0 &\geq x_k x_{k+1} - x_k - x_{k+1} + 1, \\ 0 &\geq (x_k - 1)(x_{k+1} - 1), \end{aligned}$$

a to platí, keďže $x_k \leq 1$ (a teda $x_k - 1 \leq 0$) a $x_{k+1} \geq 1$ (a teda $x_{k+1} - 1 \geq 0$).

Tým je dôkaz hotový. Pre lepšiu jasnosť ešte uvedieme, že sme dokázali toto:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k + x_{k+1} \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} + 1 < k + 1,$$

kde platnosť prvej nerovnosti vyplýva z platnsti (1) a platnosť druhej nerovnosti vyplýva z indukčného predpokladu.