2. sada domácich úloh

Termín odovzdania **20. 12. 23:59**

Úloha 1. *(2 body)* Nech $R = \{(a,b) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+;\ \lfloor \log_2 a \rfloor = \lfloor \log_2 b \rfloor\}$. Dokážte, že R je reláciou ekvivalencie na $\mathbb{N}^+$ a dostatočne presne opíšte rozklad, ktorý indukuje.

Pokiaľ máte problém s určením rozkladu, môžete ho uviesť pre prípad, že reláciu R berieme len na množine $\{1, 2, \dots, 20\}$.

Riešenie

Ukážeme, že R je reláciou ekvivalencie:

- Relácia R je reflexívna, lebo $\lfloor \log_2 a \rfloor = \lfloor \log_2 a \rfloor$, teda aRa pre všetky $a \in \mathbb{N}^+$.
- Relácia R je symetrická, lebo pre všetky $a, b \in \mathbb{N}^+$ platí:

$$aRb \Rightarrow \lfloor \log_2 a \rfloor = \lfloor \log_2 b \rfloor \Rightarrow \lfloor \log_2 b \rfloor = \lfloor \log_2 a \rfloor \Rightarrow bRa.$$

- Relácia R je tranzitívna, lebo pre všetky $a, b, c \in \mathbb{N}^+$ platí:

$$aRb \wedge bRc \Rightarrow \lfloor \log_2 a \rfloor = \lfloor \log_2 b \rfloor \wedge \lfloor \log_2 b \rfloor = \lfloor \log_2 c \rfloor \Rightarrow \lfloor \log_2 a \rfloor = \lfloor \log_2 c \rfloor \Rightarrow aRc.$$

Pre určenie rozkladu najprv určíme, ako vyzerá trieda ekvivalencie $R[a]$ obsahujúca číslo a. Ak $\lfloor \log_2 a \rfloor = k$, tak $R[a]$ obsahuje práve tie čísla b, pre ktoré platí $\lfloor \log_2 b \rfloor = k$ $(= \lfloor \log_2 a \rfloor)$, čo je ekvivalentné s $k \leq \log_2 b < k + 1 \Leftrightarrow 2^k \leq b < 2^{k+1}$. Teda $R[a] = \{b \in \mathbb{N}^+;\ 2^k \leq b < 2^{k+1},\ k = \lfloor \log_2 a \rfloor\}$. Pre získanie celého rozkladu nám stačí zobrať triedy pre mocniny dvojky. Rôzne mocniny dvojok sú zjavne v iných triedach a každé kladné prirodzené číslo a je v triede $R[2^{\lfloor \log_2 a \rfloor}]$. Preto rozklad indukovaný reláciou R je

$$\{\{b \in \mathbb{N}^+;\ 2^k \leq b < 2^{k+1}\};\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Úloha 2. *(2 body)* Nech

$$\preceq = \{((a,b),(c,d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2;\ (\exists k \in \mathbb{N})(c = ka \wedge d = kb)\}.$$

Dokážte, že $\preceq$ je reláciou usporiadania na $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a nájdite všetky jej minimálne, maximálne, najväčšie a najmenšie prvky.

Pokiaľ je hľadanie minimálnych a ostatných prvkov pre Vás príliš náročné, môžete uviesť tieto prvky pre prípad, že reláciu $\preceq$ berieme len na množine $\{0, 1, 2, 3, 4, 6\}^2$.

Relácia $\preceq$ je reflexívna, lebo pre všetky $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ platí

$$a = 1 \cdot a \wedge b = 1 \cdot b \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N})(a = ka \wedge b = kb) \Rightarrow (a, b) \preceq (a, b).$$

Relácia $\preceq$ je antisymetrická, lebo pre všetky $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} &(a,b) \preceq (c,d) \wedge (c,d) \preceq (a,b) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N})(c = ka \wedge d = kb) \wedge (\exists k \in \mathbb{N})(a = kc \wedge b = kd) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (c = ka \wedge d = kb) \wedge (a = lc \wedge b = ld) \qquad \text{pre nejaké} k, l \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ &\Rightarrow c = klc \wedge d = kld. \end{aligned}$$

Ak $c \neq 0$ alebo $d \neq 0$, tak vydelením nenulovým c alebo d dostaneme $kl = 1$. Keďže $k, l \in \mathbb{N}$, tak $k = l = 1 \Rightarrow a = c \wedge b = d \Rightarrow (a, b) = (c, d)$. Ak $c = d = 0$, tak platí $a = lc = 0$ a $b = ld = 0.$, teda $(a, b) = (c, d) = (0, 0)$. V oboch prípadoch platí $(a, b) = (c, d)$.

Relácia $\preceq$ je tranzitívna, lebo pre všetky $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ platí

$$\begin{gathered}(a,b) \preceq (c,d) \wedge (c,d) \preceq (e,f) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N})(c = ka \wedge d = kb) \wedge (\exists k \in \mathbb{N})(e = kc \wedge f = kd) \Rightarrow \\ \Rightarrow (c = ka \wedge d = kb) \wedge (e = lc \wedge g = ld) \qquad \text{pre nejaké} k, l \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ \Rightarrow e = lka \wedge f = lkb \Rightarrow \\ \Rightarrow (\exists m \in \mathbb{N})(e = ma \wedge f = mb) \Rightarrow \\ (a,b) \preceq (e,f).\end{gathered}$$

Teraz určíme význačné prvky tohto usporiadania.

- Najväčším, a teda aj jediným maximálnym prvkom, je $(0,0)$, lebo pre všetky $(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ platí $(x,y) \preceq (0,0) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})(0 = kx \wedge 0 = ky)$ – stačí nám zvoliť $k = 0$.
- Ukážeme, že minimálne sú práve tie prvky $(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, kde a, b sú nesúdeliteľné (teda nemajú spoločného deliteľa väčšieho ako 1):
  - Ak sú a, b nesúdeliteľné, tak pre všetky $(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ platí $(x,y) \preceq (a,b) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N})(a = kx \wedge b = ky)$. Teda k je spoločný deliteľ a, b, keďže sú však nesúdeliteľné, tak musí platiť $k = 1$, z čoho dostávame $(x,y) = (a,b)$. (Tým sme ukázali, že všetky prvky (a,b), kde a, b sú nesúdeliteľné, sú minimálne – od prvku (a,b) nexistuje ostro menší.)
  - Ak a, b majú spoločného deliteľa $d > 1$, tak potom platí $(a/d, b/d) \preceq (a,b)$ a taktiež pre $a \neq 0$ platí $a/d < a$, analogicky pre $b \neq 0$ máme $b/d < b$. Preto ak $(a,b) \neq (0,0)$, tak prvok $(a/d, b/d)$ je ostro menší od (a,b), a tak takýto prvok (a,b) nemôže byť minimálnym. Pre $(0,0)$ zas máme $(1,1) \prec (0,0)$, tak tiež nie je minimálny.
- Najmenší prvok neexistuje, nakoľko existuje viacero minimálnych prvkov a tie ne sú medzi sebou porovnateľné.

Úloha 3. *(2 body)* Rozhodnite, či množina všetkých

a) rastúcich,

b) nerastúcich

postupností prirodzených čísel je spočítateľná.

Poznámka. Postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je rastúca, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$, a nerastúca, ak pre všetky $n \in N$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

Upresnenie. Zadanie sme pôvodne mysleli len pre nekonečné postupnosti, čo tam však nebolo jasne napísané. Riešenie sme preto prispôsobili aj konečným postupnostiam.

a) rastúce postupnosti

Ukážeme, že množina všetkých rastúcich postupností prirodzených čísel je nespočítateľná.

Riešenie cez diagonalizačnú metódu

Pre spor predpokladajme, že množina všetkých rastúcich postupností prirodzených čísel je spočítateľná. To znamená, že všetky tieto rastúce postupnosti možno zoradiť do postupnosti $(p_i)_{i=0}^{\infty} = (p_0, p_1, p_2, \dots)$ (pripomíname, že p_i je postupnosť, nie prirodzené číslo). Označme j-ty člen postupnosti p_i ako $p_{i,j}$.[1] Definujme postupnosť

[1] Toto označenie korešponduje s tým, že si všetky členy všetkých postupností vieme predstaviť v tabuľke. Každá postupnosť má vlastný riadok, kde je v každom stĺpci jeden jej člen. Preto pre opis členu využívame dve súradnice (podobne ako pri dvojrozmerných poliach).

$(r_n)_{n=0}^{\infty}$ nasledovne:

$$r_n = \begin{cases} 2n, & \text{ak } p_{n,n} \neq 2n \text{ alebo nie je definované,} \\ 2n+1, & \text{ak } p_{n,n} = 2n. \end{cases}$$

Postupnosť $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ je zjavne rastúca. Taktiež zjavne platí $r_n \neq p_{n,n}$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, teda postupnosť $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ je rôzna od každej z postupností p_i. To je ale spor s tým, že v postupnosti $(p_i)_{i=0}^{\infty}$ sa nachádzajú všetky rastúcu postupnosti prirodzených čísel.

Riešenie cez mohutnosti

Nech R je množina všetkých rastúcich postupností prirodzených čísel. Uvažujme zobrazenie $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to R$, ktoré množine $M \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ priradí postupnosť $(a_n)_{n=0}^{|M|}$, ktorá bude obsahovať všetky prvky množiny M v rastúcom poradí. (Postupnosť bude teda konečná, ak je M konečná, inak nekonečná.) Ukážeme, že zobrazenie f je injekvívne. Nech M a N sú rôzne podmnožiny prirodzených čísel. Nech b je číslo, v ktorých sa líšia, bez ujmy na všeobecnosti nech $b \in M \wedge b \notin N$. Prirodzených čísel menších ako b je konečne veľa. Preto sa niekedy číslo b dostane do postupnosti $f(M)$. Avšak postupnosť $f(N)$ neobsahuje b, keďže $b \notin N$. Preto sú postunosti $f(M)$ a $f(N)$ rôzne.

Tým sme dokázali, že f je injekcia z $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ do R, teda $|R| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Z Cantorovej vety vieme, že $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$. Z toho dostávame, že $|R| > |\mathbb{N}|$, a teda množina R je nespočítateľná.

Poznámka. Postupnosť $(a_n)_{n=0}^{|M|}$ možno formálnejšie definovať rekurentným predpisom

$$a_n = \min(M - \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}), \qquad \text{pre všetky } 0 \leq n < |M| + 1.$$

(Špeciálne teda platí $a_0 = \min(M - \emptyset) = \min M$.) Táto definícia je korektná, nakoľko pre každé $0 \leq n < |M| + 1$ platí $|M| > |\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}|$, preto je množina $M - \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ neprázdna, čiže má najmenší prvok.

b) nerastúce postupnosti

Nech K je množina všetkých nekonečných nerastúcich postupností a nech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je jedna taká postupnosť. Prirodzených čísel menších ako a_0 je konečne veľa, preto sa v postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ len konečne veľa krát stane, že jej člen klesne oproti predchádzajúcemu. Preto od nejakej pozície k bude postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konštantná. Teda k je najmenšie také číslo, pre ktoré platí $a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \ldots$. Zostrojme preto injekciu $f\colon K \to \mathbb{N}$, ktorá postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in K$ priradí prirodzené číslo

$$f((a_n)_{n=0}^{\infty}) = p_0^k \cdot p_1^{a_0} \cdot p_2^{a_1} \cdot \cdots \cdot p_{k+1}^{a_k},$$

kde $p_0, p_1, p_2, \ldots$ sú prvočísla zoradené od najmenšieho.

Ukážeme, že f je injektívne. Ukážeme, že každému prirodzenému číslu b v tomto zobrazení prislúcha najviac jeden vzor. Číslo b si rozložíme na súčin prvočísel, čo je jednoznačné. Nech k je exponent prvého prvočísla p_0 (teda dvojky). Číslo b sme museli dostať ako obraz postupnosti, ktorá je konštantná od pozície k a na pozíciách 0 až k má postupne exponenty prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}$ (ak sa niektoré prvočíslo v rozklade b nenachádza, berieme ako exponent 0). Týmto procesom vieme zrekonštruovať z čísla b jeho vzor jednoznačne, príp. žiadnym spôsobov (ak napr. nedostaneme neklesajúcu postupnosť exponentov). Preto je zobrazenie f injektívne. To znamená, že $|K| \leq |\mathbb{N}|$, a teda množina K je spočítateľná.

Ak by sme chceli riešenie upraviť pre všetky neklesajúce postupnosti (aj konečné), tak podobnou myšlienkou ukážeme, že všetky konečné nerastúce postupnosti sú spočítateľné. Potom využijeme, že zjednotenie dvoch spočítateľných množín je spočítateľné.