

2. sada domácich úloh

Termín odovzdania **20. 12. 23:59**

Úloha 1. (2 body) Nech $R = \{(a, b) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+; \lfloor \log_2 a \rfloor = \lfloor \log_2 b \rfloor\}$. Dokážte, že R je reláciou ekvivalencie na \mathbb{N}^+ a dostatočne presne opíšte rozklad, ktorý indukuje.

Pokiaľ máte problém s určením rozkladu, môžete ho uviesť pre prípad, že reláciu R berieme len na množine $\{1, 2, \dots, 20\}$.

Úloha 2. (2 body) Nech

$$\preceq = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2; (\exists k \in \mathbb{N})(c = ka \wedge d = kb)\}.$$

Dokážte, že \preceq je reláciou usporiadania na $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a nájdite všetky jej minimálne, maximálne, najväčšie a najmenšie prvky.

Pokiaľ je hľadanie minimálnych a ostatných prvkov pre Vás príliš náročné, môžete uviesť tieto prvky pre prípad, že reláciu \preceq berieme len na množine $\{0, 1, 2, 3, 4, 6\}^2$.

Úloha 3. (2 body) Rozhodnite, či množina všetkých

- a) rastúcich,
- b) nerastúcich

postupností prirodzených čísel je spočítateľná.

Poznámka. Postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je rastúca, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$, a nerastúca, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

Bonus 1. (3 body) Nech R je reflexívna a tranzitívna relácia na množine A . Dokážte, že relácia $R \cap R^{-1}$ je reláciou ekvivalencie na A . Označme \mathcal{S} rozklad množiny A indukovaný reláciou $R \cap R^{-1}$ a definujme na rozklade \mathcal{S} reláciu

$$\preceq = \{(X, Y) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}; (\exists x \in X)(\exists y \in Y)xRy\}.$$

Dokážte, že \preceq je usporiadaním na množine \mathcal{S} .

Poznámka. Relácia $|$ je reflexívna a tranzitívna na \mathbb{Z} , no nie je usporiadaním. Táto úloha vlastne opisuje všeobecný návod, ako možno z takejto relácie dostať usporiadanie. V tomto konkrétnom prípade to znamená, že čísla $a, -a$, ktoré kazia asymetriu, budeme pokladať za rovnaké a budeme ich používať

Pravidlá a pokyny

- **Úlohy spisujte samostatne.** Môžete sa o nich rozprávať a môžete si poradiť. Avšak ich spísanie je už na vás. Vaše spísané riešenia si neukazujte.
- Úlohy odovzdajte do **20. 12. 23:59** pomocou Pridelenej úlohy (Assignments) na Microsoft Teams. Nezaбудnite kliknúť na tlačidlo Turn in.
- Úlohy odovzdávajte ako **jeden súbor vo formáte pdf**. Je na vás, či napíšete riešenie na počítači alebo na papieri a oskenujete. V prípade, že chcete riešenie fotiť, dajte si pozor, aby bola fotka dostatočne kvalitná a svetlá. Aj fotky / scany odovzdajte ako jeden pdf súbor.
- Do riešenia úlohy zahrňte aj príslušné slovné komentáre, aby bolo z riešenia jasné, čo robíte a ako úlohu rozumiете.
- Pri riešení sa neodvolávajú na úlohy, ktoré sme robili na cvičeniach. Pokiaľ chcete nejaký výsledok z cvičení využiť, doplňte tam jeho dôkaz.