Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského, Bratislava
Katedra Informatiky

Úvod do diskrétnych štruktúr

Lucia Haviarová, Ján Mazák, Eduard Toman

(Zbierka úloh)

Bratislava, 2015

Obsah

Úvod

Predložená zbierka je napísaná pre predmet Úvod do diskrétnych štruktúr, študijný odbor Informatika, prvý ročník na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky v Bratislave. Obsahuje zozbierané príklady k prednáškam z diskrétnej matematiky na tejto fakulte.

Je možné že zbierka obsahuje preklepy a iné chyby. Veríme však, že sa dajú odstrániť a preto čitateľovi, ktorý na tieto nedostatky upozorní, budeme veľmi vďační.

Kapitola 1

Výroková logika

1. Dokážte pomocou pravdivostných tabuliek, že uvedené výroky sú tautológie.

   (a) $(A \vee A) \iff A$

   (b) $(A \wedge A) \iff A$

   (c) $(A \wedge B) \iff (B \wedge A)$

   (d) $(A \vee B) \iff (B \vee A)$

   (e) $(A \iff B) \iff (B \iff A)$

   (f) $(A \wedge (B \wedge C)) \iff ((A \wedge B) \wedge C)$

   (g) $(A \vee (B \vee C)) \iff ((A \vee B) \vee C)$

   (h) $(A \vee (B \wedge C)) \iff ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

   (i) $(A \wedge (B \vee C)) \iff ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

   (j) $(A \wedge (B \vee A)) \iff A$

   (k) $(A \vee (B \wedge A)) \iff A$

   (l) $(\neg\neg A) \iff A$

   (m) $A \vee \neg A$

   (n) $\neg(A \wedge \neg A)$

(o) $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A \vee \neg B)$

(p) $\neg(A \vee B) \iff (\neg A \wedge \neg B)$

(q) $(\neg A \to \neg B) \iff (B \to A)$

(r) $(A \iff B) \iff ((A \to B) \wedge (B \to A))$

(s) $(A \wedge B) \iff \neg(\neg A \vee \neg B)$

(t) $(A \vee B) \iff \neg(\neg A \wedge \neg B)$

(u) $(A \to B) \iff (\neg A \vee B)$

(v) $A \to (B \to A)$

(w) $(\neg A \to A) \to A)$

(x) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(y) $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$

2. Dokážte pomocou pravdivostných tabuliek, že uvedené výroky sú tautológie.

(a) $(A \wedge B) \to A$

(b) $(A \wedge B) \to B$

(c) $A \to (A \vee B)$

(d) $B \to (A \vee B)$

(e) $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$

(f) $A \to (B \to (A \wedge B))$

(g) $(A \to C) \to (B \to C) \to ((A \vee B) \to C)$

(h) $(A \wedge \neg A) \iff 0$

(i) $(A \vee \neg A) \iff 1$

(j) $(A \wedge 1) \iff A$

(k) $(A \wedge 0) \iff 0$

(l) $(A \vee 0) \iff A$

(m) $(A \to 0) \iff \neg A$

(n) $(A \to 1) \iff 1$

(o) $(1 \to A) \iff A$

3. V programovacích jazykoch sa nevyskytuje logická spojka pre implikáciu. Ako by ste vyjadrili implikáciu $A \to B$ pomocou výrokov A, B a logických spojok AND, OR, NOT?

4. Zistite, či pre implikáciu a ekvivalenciu platia komutatívny a asociatívny zákon.

5. Preskúmajte vzťahy medzi implikáciou, ekvivalenciou a ostatnými logickými spojkami.

6. Aký význam budú mať výroky $(\forall x)A(x)$, $(\exists x)A(x)$ v prípade, že $A(x)$ bude definované na jednoprvkovej, resp. prázdnej množine?

7. Negujte dané výroky. Vyjadrite slovne ich obsah.

   (a) $(\exists x)(x \in N)$

   (b) $(\exists x)[(x \in N) \wedge (x > 5)]$

   (c) $(\exists x)[(x \mod 2 = 0) \vee (x \mod 2 = 1)]$

   (d) $(\forall x)[(x \mod 2 = 0) \vee (x \mod 2 = 1)]$

   (e) $(\exists x)[(x \mod 2 = 0) \wedge (x \mod 2 = 1)]$

   (f) $(\exists x)[(x \in N) \wedge (x^2 + 2x + 1 \geq 0)]$

   (g) $(\forall x)(\forall y)[[(x > 0) \wedge (x > 0)] \to (x.y > 0)]$

   (h) $(\forall x)(\forall y)[[(x > 0) \wedge (x > 0)] \to (\exists c)[(c = x.y) \to [(\forall z_1)((z_1 > c) \to (z_1 > 0))]]]$

8. Vyjadrite pomocou matematických symbolov výrok "Existuje nekonečne veľa prvočísel.".

9. Pre ľubovoľné výrokové formy $A(x)$, $B(x)$ sú nasledujúce kvantifikované výroky tautológiami

$$(\forall x)(A(x) \to B(x)) \to ((\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x))$$
$$(\exists x)(A(x) \to B(x)) \to ((\forall x)A(x) \to (\exists x)B(x))$$

   Zistite, či platia opačné implikácie

$$((\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x)) \to (\forall x)(A(x) \to B(x))$$
$$((\forall x)A(x) \to (\exists x)B(x)) \to (\exists x)(A(x) \to B(x))$$

   Návod: skúste nájsť také výrokové formy $A(x)$, $B(x)$, pre ktoré nie sú uvedené kvantifikované výroky tautológiami.

10. Zistite, či sú nasledujúce kvantifikované výroky tautológiami

    (a) $(\forall x)A(x) \to (\exists x)A(x)$
    (b) $(\exists x)A(x) \to (\forall x)A(x)$
    (c) $(\exists x)(A(x) \to B(x)) \to ((\exists x)A(x) \to (\exists x)B(x))$
    (d) $(\forall x)(A(x) \to B(x)) \to ((\exists x)A(x) \to (\exists x)B(x))$

11. Nech $A(x, y)$ je výroková forma dvoch premenných. Pomocou kvantifikovaných výrokov z nej možno urobiť týchto osem výrokov

    P1 $(\forall x)(\forall y)A(x, y)$
    P2 $(\forall x)(\exists y)A(x, y)$
    P3 $(\exists x)(\forall y)A(x, y)$
    P4 $(\exists x)(\exists y)A(x, y)$
    P5 $(\forall y)(\forall x)A(x, y)$
    P6 $(\forall y)(\exists x)A(x, y)$

P7 $(\exists y)(\forall x)A(x,y)$

P8 $(\exists y)(\exists x)A(x,y)$

Zostrojte 5 rozličných príkladov výrokovej formy $A(x,y)$. Presvedčte sa, že kvantifikované výroky sú viazané nasledujúcimi vzťahmi a že žiadnu implikáciu nemožno nahradiť ekvivalenciou.

$$P1 \iff P5 \begin{matrix} \to P3 \to P6 \to \\ \to P7 \to P2 \to \end{matrix} P4 \iff P8$$

12. Udajte príklady dvoch výrokov a utvorte z nich konjunkciu, disjunkciu, implikáciu, ekvivalenciu.

13. Prepíšte z prirodzeného jazyka do jazyka výrokovej logiky nasledujúce výroky a negujte ich

    (a) Mama nepôjde na výlet bez otca.

    (b) Ak nepôjde na výlet Katka, tak nepôjde ani Jano.

    (c) Jano pôjde práve vtedy, keď pôjde Zuzka.

    (d) Anka na výlet pôjde a Eva na výlet nepôjde.

14. Negujte nasledujúce výroky

    (a) Na výlet pôjdem iba vtedy, keď nebude pršať.

    (b) Všetky okná v miestnosti sú zatvorené.

    (c) Nórsko má aspoň 15 tisíc obyvateľov.

    (d) V závode pracuje najviac 9 inžinierov.

15. Napíšte obrátenie, obmenu a negáciu výrokov

    (a) Ak je číslo deliteľné desiatimi, tak je deliteľné aj piatimi.

    (b) Ak je štvoruholník ABCD štvorec, tak všetky jeho štyri strany majú rovnakú veľkosť

16. Preverte, pomocou tabuľkovej metódy, ktoré formuly sú tautológie, kontradikcie a splniteľné

    (a) $(A \to B) \to (\neg B \to A)$

    (b) $A \wedge \neg B$

    (c) $A \wedge (B \wedge \neg A)$

Kapitola 2

Základné typy matematických dôkazov

1. Matematickou indukciou dokážte, že pre všetky prirodzené čísla platia nasledujúce rovnosti

   (a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$

   (b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$

   (c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = \frac{n^2.(n+1)^2}{4}$

   (d) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}.n^2 = (-1)^{n-1}.\frac{n.(n+1)}{2}$

   (e) $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n.(n + 1) = \frac{n.(n+1).(n+2)}{3}$

   (f) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i.(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

   (g) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1).(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

   (h) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2).(3i+1)} = \frac{n}{3n+1}$

   (i) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{(a+i-1).(a+i)} = \frac{n}{a.(a+n)}$, $a > 0$

   (j) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1).(2i+1).(2i+3)} = \frac{n.(n+1)}{2.(2n+1).(2n+3)}$

(k) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i.(i+1).(i+2)} = \frac{1}{2}.\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1).(n+2)}\right]$

(l) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

(m) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 = n^2.(2n^2-1)$

(n) $\sum_{i=1}^{n}(4i-3) = n(2n-1)$

(o) $\sum_{i=1}^{n} i.2^i = 2 + (n-1).2^{n+1}$

(p) $\sum_{i=1}^{n} 2.3^{i-1} = 3^n - 1$

(q) $\prod_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(i+j-1) = \frac{n^2(n+k+1)}{2}$

2. Dokážte, že pre každé nezáporné celé číslo n platí $3^n > n^2$.

3. Určte, aké musí byť k, aby bola nasledujúca rovnosť splnená, a potom ju dokážte.

   (a) $1.4 + 2.7 + \ldots + n.(3n+1) = n(n+1)(n+k)$

   (b) $2.1^2 + 3.2^2 + \ldots + n.(n-1)^2 + (n+1).n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+k)}{12}$

4. Dokážte, že pre každé prirodzené čislo n

   (a) nie je číslo $2^{3n} + 3^{4n}$ deliteľné číslom 73;

   (b) je číslo $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ deliteľné číslom 133;

5. Dokážte, že funkcia $y = \frac{2}{x}$ je klesajúca na intervale $(-\infty, 0)$ aj na intervale $(0, \infty)$.

6. Dokážte, že pre každé dve reálne čísla $a > 1$, $b > 1$ platí $\log_a b + \log_b a \leq 2$.

7. Dokážte, že prvočísel je nekonečne veľa.

8. Dokážte, že funkcia $f : y = -2x^2$ je na intervale $(-\infty, 0)$ rastúca.

9. Dokážte, že ak nemožno pravítkom a kružidlom zostrojiť uhol o veľkosti $1\circ$, tak nemožno zostrojiť ani uhol s veľkosťou $19\circ$.

10. Dokážte, že každé prirodzené čislo n

11. Nech sa dve kružnice pretínajú v bodoch A, B. Dokážte, že ak AC a AD sú ich priemery, tak body B, C, D ležia na jednej priamke.

12. Dokážte, že pre každé reálne α rôzne od $\frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$ platí

$$\cos\alpha + \sin\alpha.\mathrm{t}g\alpha + \cos\alpha.cotg\alpha + \sin\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}$$

13. Dokážte platnosť rovností pre prípustné hodnoty α, β

    (a) $\cos(90^\circ + \alpha)\cos(180^\circ - \alpha) + \sin(90^\circ + \alpha)\sin(180^\circ + \alpha) = 0$

    (b) $\mathrm{t}g^2\alpha + cotg^2\beta = \frac{\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta}$

14. Dokážte, že spojnice číslic 1, 4 a 2, 9 na ciferníku hodín sú na seba kolmé.

15. Kružnice, ktorých priemery sú odvesny pravouhlého trojuholníka, sa pretínajú na jeho prepone. Dokážte.

16. Dokážte nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom. Pre kladné reálne čísla a a b platí $(a+b)/2 \geq \sqrt{a.b}$. Kedy platí rovnosť?

17. Trojuholník ABC je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C. Označme C_1 pätu výšky z bodu C na stranu AB, P_1 pätu kolmice z bodu C_1 na stranu AC, P_2 pätu kolmice z bodu C_1 na stranu BC. Nech $|CC_1| = 1$. Dokážte, že $|CP_1| = \sin\alpha$, $|CP_2| = \cos\alpha$, $|BC_1| = \mathrm{t}g\alpha$, $|AC_1| = cotg\alpha$.

18. Dokážte, že pre každé dve reálne čísla a, b platí $|a| + |b| \geq |a + b|$.

19. Dokážte, že v trojuholníku ABC platí $a + b > 2t_c$.

20. Ak má geometrický útvar dve na seba kolmé osi súmernosti, tak je stredovo súmerný. Dokážte. Platí obrátená veta?

21. Dokážte, že $\sqrt{5}$ je iracionálne číslo.

22. Šesť družstiev sa zúčastnilo turnaja, ktorý sa hral systémom "každý s každým". Turnaj trval dva dni. Dokážte, že existujú tri družstvá, ktoré odohrali všetky svoje vzájomné zápasy za jeden deň.

23. Dokážte, že pre uhly trojuholníka α, β, γ platí $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4.\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

24. Pre každých r čísel $x_1, x_2, \cdots, x_r$ platí

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^2 \leq r(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2).$$

Dokážte matematickou indukciou. Kedy nastáva rovnosť?

Kapitola 3

Teória množín

1. Nech $A = \{a, b, \{\emptyset\}, \emptyset\}$

   a) Koľko prvkov má množina A?

   b) Zistite, ktoré z nasledujúcich 6 tvrdení sú pravdivé a ktoré nie:

$$\begin{array}{lll} A \in A & \emptyset \in A & \{a, b\} \in A \\ A \subset A & \emptyset \subset A & \{a, b\} \subset A \end{array}$$

2. Nech A, B, C sú ľubovoľné množiny. Dokážte nasledovné tvrdenia:

   pre $\cap, \cup, ^C$

   a) $A \cup A = A$

   b) $A \cap A = A$

   c) $A \cup B = B \cup A$

   d) $A \cap B = B \cap A$

   e) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

   f) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

   g) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   h) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ch) $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$

i) $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$

j) $(A \cup B)^C = (A^C \cap B^C)$

k) $(A \cap B)^C = (A^C \cup B^C)$

l) $(A^C)^C = A$

m) $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$

n) $A \cap A^C = \emptyset$, $A \cup A^C = U$

o) $A \cap (A \cup B) = A$

p) $A \cup (A \cap B) = A$

q) $A = B$ práve vtedy, keď $A^C = B^C$

pre rozdiel $-$:

a) $(A \cap B) - C = A \cap (B - C)$

b) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

c) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

d) $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$

e) $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$

f) $A - B = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$

g) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

h) $(A - B) - C = (A - C) - B$

ch) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

i) $(A - B) \cup B = A \cup B$

j) $(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$

k) $(A - C) - (B - C) = A - (B \cup C)$

l) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$

m) $A - B = A$ platí práve vtedy, ak $A \cap B = \emptyset$

n) Ak $A \subset B$, tak $B - A = B$ práve vtedy, ak $A = \emptyset$

pre symetrickú diferenciu $\dot{-}$

a) $A \dot{-} B = B \dot{-} A$

b) $A \dot{-} B = (A \cup B) - (A \cap B)$

c) $A \dot{-} (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \dot{-} C$

d) rovnica $X \dot{-} A = B$ má jediné riešenie $X := A \dot{-} B$

3. Vyjadrite ostatné množinové operácie pomocou daných operácií, alebo dokážte, že sa to nedá:

a) $\{\cup, ^C\}$;

b) $\{\cap, ^C\}$;

c) $\{\cup, \cap\}$;

d) $\{\cup, -\}$;

e) $\{\cup, \dot{-}\}$;

f) $\{-, \dot{-}\}$;

g) $\{-, ^C, \dot{-}\}$;

4. Nech A, B sú ľubovoľné množiny. Potom sú nasledovné výroky ekvivalentné:

a) $A \subseteq B$

b) $A \cap B = A$

c) $A \cup B = B$

d) $A - B = \emptyset$

e) $A^C \cup B = U$

f) $A \dot{-} B = B - A$

5. Nech A, B, C sú ľubovoľné množiny. Potom platia nasedujúce ekvivalencie:

   a) $C \subseteq A \cap B \iff (C \subseteq A \wedge C \subseteq B)$

   b) $A \cup B \subseteq C \iff (A \subseteq C \wedge B \subseteq C)$

6. Ak $A \subseteq B$, tak pre ľubovoľnú množinu C platí:

   a) $A \cup B \subseteq B \cup C$

   b) $A \cap C \subseteq B \cap C$

   c) $B^C \subseteq A^C$

   d) $A - C \subseteq B - C$

   e) $C - B \subseteq C - A$

7. Ak $A \subseteq B$, aký vzťah platí pre množiny $A \dot{-} B$ a $B \dot{-} C$?

8. Nájdite príklad množín spĺňajúcich podmienky $A \cup B = A \cup C$ a $B \neq C$.

9. Nakreslite Vennove diagramy znázorňujúce nasledujúce situácie:

   a) $A \cup B \subset A \cup C$, ale B nie je podmnožinou C

   b) $A \cap B \subset A \cap C$, ale B nie je podmnožinou C

   c) $A \cup B = C \cup B$, ale $A \neq C$

   d) $A \cap B = C \cap B$, ale $A \neq C$

10. Dokážte, že $A \cup B = \emptyset$ práve vtedy, ak $A = \emptyset$ a $B = \emptyset$.

11. Ak $A_1 \subset A_2$, $B_1 \subset B_2$, tak potom $A_1 \cap B_1 \subset A_2 \cap B_2$ a $A_1 \cup B_1 \subset A_2 \cup B_2$.

12. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ práve vtedy, keď $A \subseteq C$.

13. Rovnosť $A \cup B = A \cap C$ platí práve vtedy, keď $B \subset A \subset C$.

14. Ak existuje taká množina X, že $A \cap X = B \cap X$ a $A \cup X = B \cup X$, tak potom $A = B$.

15. Nech $A_1 \cup A_2 = B_1 \cup B_2$; zistite, či musí platiť $A_1 = B_1$ a $A_2 = B_2$.

16. Ukážte, či sú nasledovné tvrdenia ekvivalentné

    a) $A \cup B = A \cup C = B \cup C$

    b) $A \subset B \cup C$, $B \subset A \cup C$, $C \subset A \cup B$

17. Ukážte, či sú nasledovné tvrdenia ekvivalentné

    a) $A \cap B = A \cap C = B \cap C$

    b) $A \cap B \subset C$, $A \cap C \subset B$, $B \cap C \subset A$

18. Dokážte ekvivalenciu nasledovných podmienok:

    a) $A \subset B \cap C$, $B \subset A \cap C$, $C \subset A \cap B$

    b) $A \equiv B \equiv C$

    c) $A \cup B \subset C$, $A \cup C \subset B$, $B \cup C \subset A$

19. Nech $A \subset U$, $B \subset U$. Nájdite všetky množiny $X \subset U$, pre ktoré platí

    a) $A \cup X = B$

    b) $A \cap X = B$

20. $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$.

21. $(A \cup B) - B = A$, práve vtedy, ak $A \cap B = \emptyset$.

22. $A - B \subset C$ práve vtedy, ak $A - C \subset B$.

23. $A - B = A \cup B$ práve vtedy, ak $B = \emptyset$.

24. Dokážte, že nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

    a) $A - B \subset A - C$

    b) $A \cap C \subset A \cap B$

25. $A - C \subset B - C$ práve vtedy, ak $A \subset B \cup C$.

26. $A \cup B = A \cup C$ práve vtedy, ak $B - A = C - A$.

27. $A \dot{-} B = A$ práve vtedy, ak $B = \emptyset$.

28. $A \dot{-} B = \emptyset$ práve vtedy, ak $A = B$.

29. $A \dot{-} B = A \cup B$ práve vtedy, ak $A \cap B = \emptyset$.

30. $A \dot{-} B = A \cap B$ práve vtedy, ak $A = B = \emptyset$.

31. $A \dot{-} B = A \dot{-} C$ práve vtedy, ak $B = C$.

32. $A \cap (B \dot{-} C) = (A \cap B) \dot{-} (A \cap C)$

33. $(A \dot{-} B) \dot{-} (A \cap C) = A \cup B$

34. $(A \cup C) \dot{-} (B \cup C) = (A - C) \dot{-} (B - C)$

35. $(A - C) \subset (A - B) \cup (B - C)$

36. $(A \dot{-} C) \subset (A \dot{-} B) \cup (B \dot{-} C)$

37. Dokážte, že ku každej dvojici množín A_1, A_2 existujú dve disjunktné množiny B_1, B_2 také, že $A_1 \cup A_2 = B_1 \cup B_2$.

38. Dokážte, že $(\cup_{A \in \mathcal{A}} A) \setminus D = \cup_{A \in \mathcal{A}} (A \setminus D)$ pre každú množinu D a množinu množín $\mathcal{A}$.

39. Dokážte (napr. matematickou indukciou):
ak $n \geq 2$, tak

   a) $A_1 \cup \cdots \cup A_n =$
   $= (A_1 - A_2) \cup \cdots \cup (A_{n-1} - A_n) \cup (A_n - A_1) \cup (A_1 \cap \cdots \cap A_n)$

   b) $A_1 \cup \cdots \cup A_n =$
   $= A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup [A_3 - (A_1 \cup A_2)] \cup \cdots \cup [A_n - (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})]$

Definícia. Nech je daná množina M. *Potenčnou množinou* množiny M nazveme množinu všetkých podmnožín množiny M:

$$\mathcal{P}(M) = \{X | X \subseteq M\}$$

40. Zostrojte potenčné množiny pre nasledujúce množiny:
$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset\{\emptyset\}\}$, $\{a\}$, $\{a, b, \{a\}\}$

41. Koľko prvkov má potenčná množina $\mathcal{P}(M)$ n-prvkovej množiny M?

42. Nech $A \subset B$. Dokážte, že potom $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

43. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

44. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

45. Ilustrujte vzťahy v predošlých dvoch úlohách na konkrétnych množinách.

46. Rozhodnite, či pre každé dve množiny A, B platí
$$\mathcal{P}(A \setminus B) \setminus \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B).$$

47. Dokážte, že pre každé dve množiny A, B platí $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ a nájdite všetky dvojice množín A, B, pre ktoré nastáva rovnosť.

Kapitola 4

Usporiadaná dvojica a karteziánsky súčin

1. Dokážte, že karteziánsky súčin dvoch množín $A = \{\emptyset\}, B = \{\emptyset\}$ a $C = \{\{\emptyset\}\}$ nie je asociatívny.

2. Nájdite také množiny A, B, C, aby $A \cup (B \times C) \neq (A \cup B) \times (A \cup C)$ (návod: vystačíte s množinami $\emptyset$ a $\{\emptyset\}$)

3. Dokážte, že z rovnosti $X \times X = Y \times Y$ vyplýva $X = Y$.

4. Dokážte, že ak $X \neq \emptyset$ a $X \times Y = X \times Z$, tak $Y = Z$.

5. Nech A, B, C sú množiny.

   a) Dokážte, že ak $A \subseteq B$, tak $A \times C \subseteq B \times C$.

   b) Ako sa zmení výsledok z a), ak namiesto $\subseteq$ píšeme $\subset$?

6. Pre ľubovoľné tri prvky a, b, c môžeme definovať usporiadanú trojicu napríklad vzťahom $(a, b, c) = (a, (b, c))$.

   a) Dokážte, že dve usporiadané trojice sa rovnajú práve vtedy, keď majú na rovnakých miestach rovnaké prvky.

   b) Koľkými spôsobmi viete definovať usporiadanú štvoricu?

7. Nech A je množina, ktorá má n-prvkov, $X \subseteq A, Y \subseteq A$. Nájdite počet usporiadaných dvojíc (X, Y) takých, že platí $|(X - Y) \cup (Y - X)| = 1$

Kapitola 5

Relácie, ekvivalencia, rozklad množiny

1. Nech D a E sú relácie medzi prvkami množín A a B. Dokážte, že $(D \cap E)^{-1} = D^{-1} \cap E^{-1}$.

2. Nech D je relácia medzi prvkami množín A a B a nech E je relácia medzi prvkami množín B a C. Dokážte, že potom $(E \circ D)^{-1} = D^{-1} \circ E^{-1}$. (Návod: ak $(x, y) \in (E \circ D)^{-1}$, tak $(y \circ x) \in (E \circ D)$ a preto existuje také $z \in B$, že $(y, z) \in D$ a $(z, x) \in E$. Potom ale $(z, y) \in D^{-1}$, $(x, z) \in E^{-1}$, a tak $(x, y) \in D^{-1} \circ E^{-1}$. Druhá inklúzia sa dokáže podobne.)

3. Nech T je relácia na množine M. Nech I_M je množina $\{(x, x) \in M \times M; x \in M\}$. Dokážte:

   a) Relácia T je reflexívna práve vtedy, keď $I_M \subseteq T$.

   b) Relácia T je ireflexívna práve vtedy, keď $I_M \cap T = \emptyset$.

   c) Relácia T je symetrická práve vtedy, keď $T = T^{-1}$.

   d) Relácia T je asymetrická práve vtedy, keď $T \cap T^{-1} = \emptyset$.

   e) Relácia T je tranzitívna práve vtedy, keď $T \circ T \subseteq T$.

   f) Relácia T je atranzitívna práve vtedy, keď $T \circ T \cap T = \emptyset$.

g) Relácia T je trichotomická práve vtedy, keď $T \cup T^{-1} \cup I_M = M \times M$.

4. Nech T je relácia na množine M. Dokážte, že ak je T reflexívna a tranzitívna relácia, tak $T \circ T = T$. Platí aj obrátené tvrdenie?

5. Nech M je množina. Potom $\emptyset$ je relácia na M. je táto relácia reflexívna, symerická, resp. tranzitívna?

6. Dokážte, že ak ϱ je tranzitívna relácia, tak aj ϱ^{-1} je tranzitívna relácia. Dokážte, že ak ϱ je antisymetrická relácia, tak aj ϱ^{-1} je antisymetrická relácia.

7. Uvažujme reláciu

   (a) $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; (|a + b| - 24)(|a - b| - 24) = 0\}$;

   (b) $R = \{(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; (|r + s| = |3 + r - s|\}$;

   (c) $R = \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; (cd + 100)(cd - 60) = 0\}$;

   (d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; (|x + y||x - y| \leq 3\}$.

   Rozhodnite, či je R reflexívna, či je symetrická a či je tranzitívna. Svoje tvrdenia zdôvodnite. Ak je R reláciou ekvivalencie na množine celých čísel, nájdite triedy rozkladu indukovaného touto reláciou.

8. Nech D je relácia na X.

   a) Dokážte, že $D \cup D^{-1}$ je najmenšia symetrická relácia na X obsahujúca D, t.j. ak T je symetrická relácia na X obsahujúca D, tak $D \cup D^{-1} \subseteq T$.

   b) Dokážte, že $D \cap D^{-1}$ je najväčšia symetrická relácia na X obsiahnutá v D.

9. Nech $A \neq \emptyset$. Je niektorá z relácií $\emptyset, A \times A$ relácia ekvivalencie na A?

10. Nech $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ je množina všetkých celých, racionálnych, resp. reálnych čísel. Označme

$T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x - y \in \mathbb{Z}\}$
$U = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x - y \in \mathbb{Q}\}$
Dokážte, že T, U sú relácie ekvivalencie na $\mathbb{R}$. Opíšte rozklady množín $\mathbb{R}$ indukované týmito reláciami.

11. Nech W je neprázdny systém relácií ekvivalencie na X. Dokážte, že potom aj $\bigcap W$ je relácia ekvivalencie na množine X.

12. Nech D je relácia ekvivalencie na množine A. Je D^{-1} tiež relácia ekvivalencie na A?

13. Nech E je relácia ekvivalencie na množine X a T je relácia ekvivalencie na množine Y. Nech $P \subseteq (X \times Y) \times (X \times Y)$ je relácia definovaná vzťahom: $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in P \iff (x_1, x_2) \in E \wedge (y_1, y_2) \in T$. Dokážte, že P je relácia ekvivalencie na množine $X \times Y$.

14. Koľko je všetkých relácií ekvivalencie na štvorprvkovej množine? Koľko je ich na päťprvkovej množine? (Návod: nájdite všetky rozklady množiny.)

15. Nech X je množina, φ je rozklad množiny X, T je relácia ekvivalencie na X. Nech $\varphi(T)$ je rozklad indukovaný reláciou T a $T(\varphi)$ relácia ekvivalencie indukovaná rozkladom φ. Dokážte, že $\varphi = \varphi(T(\varphi))$ a $T = T(\varphi(T))$.

16. Nech D je relácia na množine A. Definujte D^*. Ukážte, že D^* je najmenšia (v zmysle inklúzie) reflexívno-tranzitívna relácia na A.

17. Nech $D \subseteq R \times R$, $(x, y) \in D \Leftrightarrow y - x$ je celé číslo. Zistite, či relácia D na $\mathbb{R}$ je reláciou ekvivalencie, ak áno, nájdite jej triedy ekvivalencie, teda rozklad prislúchajúci k ekvivalencii D.

18. Označme $\mathcal{M}$ množinu všetkých uzavretých intervalov $\langle a, b\rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Definujme na množine $\mathcal{M}$ reláciu R takto: $(I, J) \in R$, ak $\sin(I) = \sin(J)$. Dokážte, že R je relácia ekvivalencie a popíšte triedy rozkladu $\mathcal{M}$ indukovaného reláciou R.

Kapitola 6

Zobrazenia

1. Nech X, Y sú neprázdne množiny a f ľubovoľné zobrazenie z X do Y. Definujme $g : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ tak, že $g(A) = f(A)$ pre ľubovoľnú množinu $A \subseteq X$. Dokážte, že g je injektívne práve vtedy, keď f je injektívne.

Kapitola 7

Usporiadania

1. Nech A je množina. Je $\emptyset$ resp. $A \times A$ čiastočné usporiadanie množiny A? Je to usporiadanie množiny A?

2. Nech φ je neprázdny systém čiastočných usporiadaní množiny A. Dokážte, že potom aj $\bigcap \varphi$ je čiastočné usporiadanie množiny A. Platí podobné tvrdenie aj pre nemprázdny systém usporiadaní na množine A?

3. Dokážte, že ak je D je usporiadanie množiny A, tak aj D^{-1} je usporiadanie množiny A. (Usporiadanie D^{-1} sa nazýva opačné usporiadanie k usporiadaniu A.)

4. Označme znakom $Q[x]$ množinu všetkých polynómov s racionálnymi koeficientami. Nech $A[x]$ je množina všetkých polynómov v x aspoň prvého stupňa s racionálnymi koeficientami. ($A[x] = Q[x] \backslash Q$; Q množina racionálnych čísel). Definujeme na $A[x]$ reláciu D takto: Ak $f(x), g(x) \in A[x]$, tak $[f(x), g(x)] \in D$ práve vtedy, keď $g(x) = f(x).g(x)$ pre nejaké $g(x) \in A[x]$.

5. Dokážte, že čiastočné usporiadanie z predchádzajúceho cvičenia nie je usporiadanie. (Návod: Všemnite si, že $f(x) = x$ a $g(x) = x + 1$.)

6. Nech φ, τ sú dva rozklady na množine $X \neq \emptyset$. Hovoríme, že $\varphi < \tau$ (alebo, že rozklad φ je menší ako τ), ak ku každej množine $M \in \varphi$ existuje taká množina $P \in \tau$, že $M \subseteq P$. Dokážte, že $<$ je čiastočné usporiadanie systému všetkých rozkladov množiny X.

7. Dokážte, že ak M je nejaký systém rozkladov množiny A, ktorý je usporiadaný reláciou $<$ z predchádzajúceho cvičenia, tak zodpovedajúci systém relácií ekvivalencie na A je usporiadaný reláciou inklúzie.

8. Nech D je čiastočné usporiadanie neprázdnej množiny A. Dokážte, že D nie je relácia ekvivalencie na A. Ako je to v prípade $A = \emptyset$?

9. Nájdite príklad relácie na neprázdnej množine M, ktorá nie je ani čiastočným usporiadaním, ani reláciou ekvivalenice.

10. Nech $C(0,1)$ je množina všetkých spojitých funkcií definovaných na intervale $\langle 0,1\rangle$ s hodnotami v R. Nech $T \subset C(0,1) \times C(0,1)$ je relácia definovaná vzťahom $[f,g] \in T \iff ((\forall x)(f(x) \leq g(y)) \wedge (\exists y)(f(y) < g(y)))$. Dokážte, že T je čiastočné usporiadanie množiny $C(0,1)$, ktoré nie je usporiadaním.

11. Dokážte, že v usporiadanej množine sa pojem minimálneho prvku zhoduje s pojmom najmenšieho (prvého) prvku a pojem maximálneho prvku sa zhoduje s pojmom najväčšieho (posledného) prvku.

12. Dokážte, že usporiadaná množina má najviac jeden maximálny a najviac jeden minimálny prvok.

13. Nech A je čiastočne usporiadaná množina, ktorá má práve jeden minimálny prvok a. Je pravda, že potom a je aj najmenším prvkom množiny A?

14. Uvažujme reláciu deliteľnosti $|$ na $\mathbb{Z}^+$ ($a \mid b$, ak $\exists k \in \mathbb{Z}^+ : b = ka$). Dokážte, že táto relácia je čiastočným usporiadaním. Dokážte, že pre ľubovoľnú konečnú množinu $A \subset \mathbb{Z}^+$ existuje v $\mathbb{Z}^+$ najväčší prvok (vzhľadom na reláciu $|$).

Kapitola 8

Mohutnosti množín, spočítateľné množiny

1. Dokážte, že
   (a) $A \equiv A$ (existuje bijektívne zobrazenie z A do A)
   (b) ak $A \equiv B$, tak $B \equiv A$
   (c) ak $A \equiv B$ a $B \equiv C$, tak $A \equiv C$
2. Dokážte, že
   (a) ak $A \equiv B$, tak $|A| = |B|$
   (b) ak $|A_1| = |A_2|$, $|B_1| = |B_2|$ a $|A_1| \leq |B_1|$, tak $|A_2| \leq |B_2|$
   (c) ak existuje surjektívne zobrazenie z A do B, tak $|B| \leq |A|$
3. Nech $A_2 \subseteq A_1 \subseteq A$ a $A \equiv A_2$. Dokážte, že $A \equiv A_1$.
4. Dokážte, že ak $|A| \leq |B|$ a $|B| \leq |A|$, tak $|A| = |B|$ (Cantor-Bernstainova veta).
5. Dokážte, že

(a) každá podmnožina konečnej množiny je konečná;

(b) zjednotenie konečného počtu konečných množín je konečná množina;

(c) karteziánsky súčin konečného počtu konečných množín je konečná množina.

6. Definujte postupnosť.

7. Dokážte, že konečná množina nie je ekvivalentná žiadnej svojej vlastnej podmnožine a žiadnej svojej nadmnožine.

8. Dokážte, že dve konečné množiny sú ekvivaentné práve vtedy, keď obsahujú rovnaký počet prvkov.

9. Dokážte, že kardinálnych čísel je nekonečne veľa.

10. Dokážte, že z každej nekonečnej množiny môžeme vydeliť spočítateľnú množinu.

11. Dokážte, že množina je nekonečná vtedy a len vtedy, keď je ekvivalentná niektorej svojej podmnožine.

12. Dokážte, že každá podmnožina spočítateľnej množiny je spočítateľná alebo konečná.

13. Nech obor definície funkcie je spočítateľná množina. Dokážte, že obor hodnôt tejto funkcie spočítateľná alebo konečná množina.

14. Dokážte, že neprázdna množina A je spočítateľná alebo konečná práve vtedy, keď je množinou hodnôt niektorej funkcie z N do A.

15. Dokážte, že ak so spočítateľnej množiny vynecháme konečnú podmnožinu, tak zostávajúca množina je nekonečná.

16. Dokážte, že

(a) ak A a B sú spočítateľné množiny, tak $A \cup B$ je tiež spočítateľná;

(b) ak všetky A_i sú konečné, neprázdne a po dvoch disjunktné množiny, tak $\bigcup_{i \in N} A_i$ je spočítateľná množina.

17. Dokážte, že

(a) ak A je nekonečná množina a B je konečná alebo spočítateľná množina, tak $A \cup B \equiv A$;

(b) ak A je nekonečná a nespočítateľná množina a B je konečná alebo spočítateľná množina, tak $A \backslash B \equiv A$.

18. Dokážte, že ak $A_1, \ldots, A_n$, $n \geq 1$ sú spočítateľné množiny, tak aj $A_1 \times \ldots \times A_n$ je spočítateľná množina.

19. Dokážte, že

(a) množina celých čísel je spočítateľná;

(b) množina racionálnych čísel je spočítateľná;

(c) množina racionálnych čísel intervalu $\langle a, b \rangle$ je spočítateľná pre $a < b$;

(d) množina dvojíc (x, y), kde x a y sú racionálne císla, je spočítateľná.

20. Dokážte, že množina všetkých konečných postupností, vytvorených z prvkov niektorej spočítateľnej množiny je spočítateľná.

21. Dokážte, že množina mnohočlenov jednej premennej s celočíselnými koeficientami je spočítateľná.

22. Dokážte, že množina všetkých konečných podmnožín spočítateľnej množiny je spočítateľná.

23. Dokážte, že množina algebraických čísel, t.j. čísel, ktoré sú koreňmi mnohočlenov jednej premennej s celočíselnými koeficientami, je spočítateľná.

24. Dokážte, že ľubovoľná podmnožina po dvoch disjunktných otvorených intervalov na reálnej priamke nie je väčšia než spočítateľná.

25. Dokážte, že pre ľubovoľný interval $(a, b) \subset R$, $a < b$ platí $|(a, b)| = c$.

26. Nech $|A| = a, |B| = b, A, B$-konečné, $a \geq b$. Nech $n(a, b)$ je počet zobrazení množiny A na množinu B. Ukážte, že platí: $n(a, b) = b[n(a-1, b-1) + n(a-1, b)]$. Určte $n(5, 3)$.

27. Zostrojte množiny X, Y a zobrazenie $f : X \to Y$ tak aby relácia f^{-1} nebola zobrazenie.

28. Rozhodnite, či má každá nekonečná spočítateľná množina rozklad na nekonečne veľa nekonečných spočítateľných množín.

Záver

Literatúra

[1]