

Cvičenie 2: Kvantifikátory

Úloha 1. Vyjadrite slovne nasledovné výroky a určte ich pravdivostnú hodnotu.

- a) $(\exists x \in \mathbb{Z})(x > 5)$
- b) $(\forall x \in \mathbb{Z})(x^2 > 0)$
- c) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\sqrt{x} \in \mathbb{R}^+)$
- d) $(\exists x \in \mathbb{Z})(x = 5) \Rightarrow (\forall y \in \mathbb{Z})(y = 5)$
- e) $(\exists x \in \mathbb{Z})(x = 5) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{Z})(x = 5)$
- f) $(\forall x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z})[(x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow x \cdot y > 0]$
- g) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$
- h) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$
- i) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$
- j) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$
- k) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(xy = 0)$
- l) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(xy = 0)$
- m) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(xy = 0)$
- n) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(xy = 0)$

Úloha 2. Znegujte nasledovné zložené výroky.

- a) $(\exists n \in \mathbb{N})(42 < n < 47)$
- b) $(\forall a \in \mathbb{N}^+)(\exists b \in \mathbb{N})(\forall c \in \mathbb{N})(c > b \Rightarrow c^a < 2^c)$
- c) $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})[(a \notin \mathbb{Q} \wedge b > 0) \Rightarrow (\exists c \in \mathbb{Q})(|a - c| < b)]$
- d) $(\forall a \in \mathbb{N})[(\exists b \in \mathbb{N})(a = b^2) \Rightarrow [(\forall c \in \mathbb{N})(a \neq 3c) \Rightarrow (\exists d \in \mathbb{N})(a + 2 = 3d)]]$
- e) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})[(x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow (\exists c \in \mathbb{R})[c = x \cdot y \Rightarrow [(\forall z \in \mathbb{R})(z_1 > c \Rightarrow z_1 > 0)]]]$

Úloha 3. Akú pravdivostnú hodnotu majú výroky $(\forall x \in M)a(x)$, $(\exists x \in M)a(x)$ ak M je a) prázdna b) jednoprvková množina?

Úloha 4. Zostavte výrokové formy, ktoré budú hovoriť nasledovné:

- a) $e(a)$: a je párne číslo
- b) $d \mid a$: číslo a je deliteľné číslom d .
- c) $a \bmod d = z$: a dáva zvyšok z po delení číslom d
- d) $p(x)$: x je prvočíslo
- e) $(*)$ d je najväčší spoločný deliteľ čísel a, b

Poznámka. Premenné použité v týchto výrokových formách môžu byť väčšinou brané len z niektorých množín (napr. celé čísla). Tieto zamlčané podmienky si doplňte podľa toho, ako sú známe.

Úloha 5. Zapište nasledovné výroky (môžete používať výrokové formy z predchádzajúcej úlohy):

- a) Existuje párne číslo, ktoré je väčšie ako 7.
- b) Každé celé číslo deliteľné desiatimi je deliteľné aj dvomi.
- c) Ľubovoľné reálne číslo vieme napísať ako súčet celého čísla a nezáporného reálneho čísla menšieho ako 1.
- d) Žiadne prvočíslo nie je párne.

- e) Súčet ľubovoľných troch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný tromi.
- f) Súčet nepárnych čísel je nepárny.
- g) Medzi ľubovoľnými dvomi racionálnymi číslami je nejaké iracionálne.
- h) Existuje najmenšie celé číslo.
- i) Existuje práve jedno párne celé číslo.
- j) (*) Prvočísel je nekonečne veľa.
- k) (*) Ľubovoľne malé kladné reálne číslo vieme zdola aproximovať kladným racionálnym číslom.
- l) (*) Pre každé celé číslo a , d ($d \neq 0$) vieme jednoznačne určiť zvyšok čísla a po delení číslom d .