Cvičenie 3: Dôkazy

Úloha 1. Dokážte, že platí:

a) $\sqrt{60} > \sqrt{13} + \sqrt{17}$

b) $\sqrt{9 - \sqrt{10}} < \sqrt{9 + \sqrt{10}} - 1$

c) $\sqrt{4} + \sqrt{7} < \sqrt{3} + \sqrt{12}$

d) $\sqrt{60} + \sqrt{\sqrt{47} - \sqrt{46}} > \sqrt{13} + \sqrt{17}$

Úloha 2. Vysvetlite, prečo je nasledovný „dôkaz“ tvrdenia chybný:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &> \sqrt{3}, && \mid -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} - \sqrt{3} &> 0, && \mid^2 \\ 2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} + 3 &> 0, && \mid +2\cdot\sqrt{6} \\ 5 &> 2\cdot\sqrt{6}, && \mid^2 \\ 25 &> 24, && \end{aligned}$$

a to je pravda. Preto platí $\sqrt{2} > \sqrt{3}$.

Úloha 3. Dokážte, že pre všetky nezáprone reálne čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Úloha 4. Zistite, či nasledovné výroky sú tautológie.

a) $[(A \Rightarrow B) \wedge (C \vee D) \wedge ((\neg A \wedge C) \Rightarrow E)] \Rightarrow [\neg B \Rightarrow (E \vee D)]$,

b) $[(\neg A \Rightarrow B) \vee (C \wedge D) \vee (E \wedge \neg C \wedge \neg A)] \Rightarrow [(\neg B \wedge \neg C) \Rightarrow A]$,

c) $[(\neg A \Rightarrow B) \vee (C \wedge D) \vee (E \wedge \neg C \wedge A)] \Rightarrow [(\neg B \wedge \neg C) \Rightarrow A]$,

d) $[(A \Rightarrow B) \wedge (\neg B \vee C)] \Rightarrow [((C \Rightarrow D) \wedge A) \Rightarrow D]$

e) $(A \wedge \neg B) \vee [((\neg C \vee D) \wedge (A \vee \neg E) \wedge (F \vee \neg G)) \Rightarrow (D \vee \neg E)]$

f) $(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg B \Rightarrow (D \wedge \neg E)) \vee (\neg C \wedge D \wedge E) \vee (D \Rightarrow (\neg A \wedge C))$.

Úloha 5. Zistite, či nasledovné výroky sú tautológie.

a) $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))$

b) $((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)) \Rightarrow (\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x))$

c) $(\exists x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)b(x))$

d) $((\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)b(x)) \Rightarrow (\exists x)(a(x) \Rightarrow b(x))$

e) $(\forall x)(a(x) \wedge b(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)a(x) \wedge (\forall x)b(x))$

f) $(\forall x)(a(x) \vee b(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)a(x) \vee (\forall x)b(x))$

Úloha 6. Dokážte nasledovné tvrdenia:

a) $(\forall n \in \mathbb{N})(7 \nmid 47n \Rightarrow 7 \nmid n)$

b) $(\forall a, b \in \mathbb{N})[(22 \mid a \wedge 33 \mid b) \Rightarrow 11 \mid (a+b)]$

c) $\log_2 3$ je iracionálne číslo.

d) $(\forall n \in \mathbb{N}^+)(2^n < n! \Rightarrow 2^{n+1} < (n+1)!)$

e) $(\forall a, b \in \mathbb{N})[(a \bmod 7 = 4 \wedge b \bmod 7 = 5) \Rightarrow ab \bmod 7 = 6]$

f) Pre každé prvočíslo p je $\sqrt{p}$ iracionálne číslo.

Úlohy na ďalšie precvičenie dôkazov

Úloha 7. Dokážte:

a) $(\forall n \in \mathbb{N})(5 \mid n^2 + 1 \Rightarrow 10 \nmid n)$

b) Ak prirodzené číslo n nie je deliteľné tromi, tak n^2 dáva po delení tromi zvyšok 1.

c) Ak súčet reálnych čísel a, b, c, d, e je nula, tak aspoň jedno z nich je nezáporné.

d) Súčet tretích mocnín troch za sebou idúcich čísel je deliteľný deviatimi.

e) $(\forall a, b \in \mathbb{R}^+)\left(\frac{a+b}{2} \leq \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}\right)$

Úloha 8. Dokážte, že ak a, b sú racionálne čísla, tak aj $a \cdot b$ je racionálne číslo.

Úloha 9. Dokážte, že ak súčin dvoch reálnych čísel x a y je iracionálne číslo, musí byť aspoň jedno z čísel x a y iracionálne.

Úloha 10. Nech a, b sú kladné celé čísla. Dokážte, že ak nemožno krátiť zlomok $\frac{a}{b}$, tak nemožno krátiť ani zlomok $\frac{a-b}{a+b}$.

Úloha 11. Máme reálne čísla a, b, c také, že čísla

$$\frac{1}{b+c}, \qquad \frac{1}{c+a}, \qquad \frac{1}{a+b}$$

tvoria aritmetickú postupnosť. Dokážte, že aj čísla a^2, b^2, c^2 tvoria aritmetickú postupnosť.

Úloha 12. Dokážte, že ak existuje nekonečne veľa prvočísel p, pre ktoré je aj $p+2$ prvočíslo, tak potom existuje nekonečne veľa prvočísel p, pre ktoré je $p+2$ prvočíslo a navyše $p+1$ je deliteľné 6-timi.

Úloha 13. Dokážte, že ak e (eulerova konštanta) nie je riešením polynomiálnej rovnice s celočíselnými koeficientmi, tak ani $2e$ nie je.

Úloha 14. O čísle π vieme, že je iracionálne. Dokážte, že číslo

$$\frac{47}{\sqrt[3]{\pi} + 42}$$

je tiež iracionálne.

Úloha 15. Dokážte, že pre každé prvočíslo p je $\sqrt{p}$ iracionálne číslo.

Úloha 16. Je číslo $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ racionálne?

Úloha 17. Dokážte, že ak $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ pre nejaké racionálne čísla a, b, tak aj $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, aj $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

Úloha 18. Dokážte, že pre každé celé čísla x, y platí

$$31 \mid 6x + 11y \Leftrightarrow 31 \mid x + 7y.$$

Úloha 19. Nech a, b, c sú reálne čísla, pre ktoré platí $a + b + c = 0$. Dokážte, že

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = -3.$$

Úloha 20. Rozhodnite o platnosti nasledovných výrokov:

a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})((x \notin \mathbb{Q} \land y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \notin \mathbb{Q}))$

b) $(\exists c \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(47n^5 + 42n^3 + 17n^2 - 9 \leq nc^5)$

c) $(\exists c \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(n^2 + 47 \leq cn)$

d) $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x \geq K \Rightarrow x^7 - 50x^6 - 47x^5 - 42x^3 - 17x^2 + 18x - 9 \geq 0)$

Pri riešení nevyužívajte vysokoškolskú matematiku (limity, derivácie, ...).

Úloha 21. (*) Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n je číslo 2 najväčším spoločným deliteľom čísel $2n + 6$, $4n + 10$.

Úloha 22. (*) Dokážte, že ak existuje nekonečne veľa palindromických prvočísel (čítajú sa rovnako spredu aj odzadu), tak existuje aj nekonečne veľa palindromických prvočísel, ktoré majú nepárny počet cifier.

Riešenie úlohy 5a)

Dokážeme, že $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))$ je tautológia.

Priamy dôkaz.

1. Nech platí $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x))$.
Dokážeme, že platí $(\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)$:

> 2. Nech platí $(\forall x)a(x)$.
> Dokážeme, že platí $(\forall x)b(x)$:
>
> > Pre každé x platí:
> >
> > > 3. $a(x)$ (lebo 2.)
> > > 4. $a(x) \Rightarrow b(x)$ (lebo 1.)
> > > 5. $b(x)$ (lebo 3. a 4.)
> >
> > Teda platí $(\forall x)b(x)$.
>
> Teda platí $(\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)$

Teda platí $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))$

Komentár. Dokazovaná tautológia má formu implikácie. Tú dokazujeme priamo tak, že predpokladáme pravdivosť ľavej strany a ukážeme, že platí aj pravá strana. Keďže na pravej strane je opäť implikácia, tak tento postup zopakujeme. Dôkazy týchto dvoch implikácií sú v červených rámčekoch. Dostaneme sa k dokazovaniu výroku v tvare všeobecného kvantifikátora (modrý rámček). Ten dokazujeme tak, že napíšeme dôkaz kvantifikovanej výrokovej formy všeobecne za pomoci premennej (zlený rámček). Všimnite si, že vnútri zeleného rámčeka nemáme žiadne kvantifikátory. Do vašich riešení nemusíte písať tento komentár. Tiež môžete vypustiť aj závery „Teda platí…“

Dôkaz sporom Pre spor predpokladajme, že existuje univerzum a na ňom definované výrokové formy $a(x)$, $b(x)$, pre ktoré dostaneme nepravdivý výrok, teda:

1. $\neg[(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))]$
2. $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \wedge \neg[(\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)]$ (negácia 1.)
3. $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x))$ (lebo 2.)
4. $(\exists x)(a(x) \wedge \neg b(x))$ (lebo 2. + negácia)
5. $a(c) \wedge \neg b(c)$ pre nejaký prvok c (lebo 4.) (tu sme zaviedli do nášho dôkazu **novú** premennú c, ktorou sme označili prvok univerza, ktorého existenciu zaručuje výrok 4.)
6. $a(c) \Rightarrow b(c)$ (lebo 2. platí pre všetky prvky univerza, teda aj pre naše c)
7. $\neg(a(c) \Rightarrow b(c))$ (negácia 5.) – SPOR s tvrdením 6.

Časti písané šedou slúžia pre lepšie objasnenie, do riešnia takto podrobne netreba písať.

Niekoľko rád ako dokazovať výroky podľa typu

Tu je prehľad základných štruktúr dôkazu podľa typu výroku, ktorý máme dokazovať. Defaultne tak dostaneme priamy dôkaz, ale nič nám nebraní pred dokazovaním si dokazované tvrdenie upraviť na iné (nepriamym dôkazom či matematickou indukciou).

$A \wedge B$: Dokážme A a potom dokážeme B.

$A \vee B$: Rozdelíme dôkaz na dva prípady (napr. ak je nejaké číslo párne alebo nepárne). Z jedného dokážeme A a zdruhého dokážeme B.

$A \Rightarrow B$: Predpokladáme, že A platí a dokážeme B.

$A \Leftrightarrow B$: Dokážme $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$.

> $\diamond$ V niektorých prípadoch je možné nájsť postupnosť ekvivalentých úprav od výroku A k B. Tu však treba byť obozretný, či naozaj všetky sú ekvivalentné. Pre lepšiu kontrolu odporúčame skontrolovať, či sú všetky úvahy správne jedným aj druhým smerom.

$(\forall x)a(x)$: Dokážeme $a(x)$ za použitia premennej x.

$(\exists x)a(x)$: Ukážeme platnosť $a(x)$ pre jednu konkrétnu voľbu premennej x (napr. dokážeme $a(47)$). Pri voľbe x môžeme použiť aj premenné, ale iba ak už v našom dôkaze nejaké máme definované (a nesmú byť „zakryté“ kvantifikátorom).

A tu je prehľad základných logických krokov, ktoré vieme počas dokazovania robiť. Opäť pre každý z najčastejších typov výrokov uvádzame, čo z neho možno odvodiť.

$A \wedge B$: Vieme odvodiť platnosť A, rovnako aj platnosť B.

$A \vee B$: Vieme rozdeliť dôkaz na dve časti, v jednej predpokladáme platnosť A a v druhej platnosť B (vhodné pri dokazovaní výrokov so spojkou alebo).

$A \Rightarrow B$: Ak máme už dokázané A, vieme odvodiť platnosť B

$A \Leftrightarrow B$: Rovnako ako pri $A \Rightarrow B$, príp. $B \Rightarrow A$.

$(\forall x)a(x)$: Vieme za x dosadiť honotu a odvodiť pre ňu platnosť výroku (napr. $a(47)$, ak sme v celých číslach).

$(\exists x)a(x)$: Zavedieme **novú** premennú, napr. c, a odvodíme platnosť $a(c)$.