Cvičenie 5: Množiny

Úloha 1. Nech $A = \{a, b, \{\emptyset\}, \emptyset\}$

- Koľko prvkov má množina A?
- Čo platí? $A \in A$, $\quad A \subseteq A$, $\quad \emptyset \in A$, $\quad \{a, b\} \in A$, $\quad \{a, b\} \subseteq A$

Úloha 2. Dokážte identity:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $(A - C) - (B - C) = A - (B \cup C)$

Úloha 3. Zostrojte potenčné množiny $\mathcal{P}(\{a, b\}$ a $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$.

Úloha 4. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C platí $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$. Platí aj opačná implikácia?

Úloha 5. Dokážte, že nasledovné tri podmienky sú ekvivalentné:

(i) $A \subseteq B$,

(ii) $A \cup B = B$,

(iii) $A \dot{-} B = B - A$.

Úloha 6. Zistite, v akom vzťahu (rovnosť / inklúzia / žiaden) sú množiny:

a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(A \cap B)$

b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(A \cup B)$

Úloha 7. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C platia identity:

a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,

b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,

c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

Úloha 8. Dokážte, že $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ sa dá pre $n \geq 2$ vyjadriť ako:

a) $A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - (A_1 \cup A_2)) \cup \cdots \cup (A_n - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}))$

b) $(A_1 - A_2) \cup \cdots \cup (A_{n-1} - A_n) \cup (A_n - A_1) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$

Úloha 9. Nech A, B, C sú množiny.

a) Dokážte, že ak $A \subseteq B$, tak $A \times C \subseteq B \times C$.

b) Ako sa zmenení výsledok z a), ak namiesto $\subseteq$ píšeme $\subsetneq$?

c) Platí aj opačná implikácia?

Úloha 10. Dokážte, že množiny A a B sú disjunktné práve vtedy, keď $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$.

Úloha 11. Ktoré z nasledovných možností korektne definujú usporiadanú dvojicu (a, b)?

a) $\{a, b\}$

b) $\{a, a, b\}$

c) $\{a, \{b\}\}$

d) $\{\{a\}, \{b\}\}$

e) $\{a, \{a, b\}\}$

f) $\{\{a\}, \{a, b\}\}$

Úloha 12. Definujte usporiadanú trojicu (a, b, c).

Riešenie úlohy 6a)

Ukážeme, že $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

Dôkaz $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$: Pre všetky X platí:

1. Nech $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
2. $X \in \mathcal{P}(A) \land X \in \mathcal{P}(B)$ (definícia prieniku)
3. $X \subseteq A \land X \subseteq B$ (definícia potenčnej množiny)
4. $X \subseteq A \cap B$, lebo každý prvok množiny X sa nachádza v A (vďaka $X \subseteq A$) aj v B (vďaka $X \subseteq B$), teda sa nachádza aj v $A \cap B$.
5. $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$ (definícia potenčnej množiny).

Tým sme ukázali, že platí $(\forall X)(X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)) \Rightarrow (X \in \mathcal{P}(A \cap B))$.

Dôkaz $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \supseteq \mathcal{P}(A \cap B)$: Pre všetky X platí:

1. Nech $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$
2. $X \subseteq A \cap B$ (definícia potenčnej množiny)
3. $X \subseteq A$ (lebo $X \subseteq A \cap B \subseteq A$)
4. $X \subseteq B$ (lebo $X \subseteq A \cap B \subseteq B$)
5. $X \subseteq A \land X \subseteq B$ (lebo 3. a 4.)
6. $X \in \mathcal{P}(A) \land X \in \mathcal{P}(B)$ (definícia potenčnej množiny)
7. $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ (definícia prieniku)

Tým sme ukázali, že platí $(\forall X)(X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)) \Leftarrow (X \in \mathcal{P}(A \cap B))$.

Poznámky

Zdôvodnenie šedou sú zrejmé (ide len o použitie definície), môžete ich vynechať. Dôkaz 4. kroku 1. inklúzie možno spraviť viac formálne aj takto:

i. Nech $y \in X$

ii. $y \in A$ (lebo $X \subseteq A$)

iii. $y \in B$ (lebo $X \subseteq B$)

iv. $y \in A \cap B$ (lebo ii. a iii.)

Podobne možno formálne dokázať aj 3. krok (a analogicky aj 4. krok) z 2. inklúzie:

i. Nech $y \in X$

ii. $y \in A \cap B$ (lebo $X \subseteq A \cap B$)

iii. $y \in A$ (definícia prieniku)