Cvičenie 6: Karteziánsky súčin a relácie

Úloha 1. Dokážte, že pre ľubovoľné množiny A, B, C platia identity:

a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,

b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,

c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

Úloha 2. Majme reláciu M z množiny $\{a, b, c, d\}$ do množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a reláciu N na množine $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, ktoré máme zadané nasledovne:

$$M = \{(a, 2), (a, 5), (b, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 5)\},$$
$$N = \{(1, 1), (1, 3), (1, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 5)\}.$$

Vypíšte relácie M^{-1}, N^{-1}, MN a NM (ak existujú).

Úloha 3. Na množine L všetkých ľudí, ktorá má rozklad $\{M, Z\}$ na mužov a ženy, definujeme relácie:

- D: $aDb \Leftrightarrow a$ je dieťaťom b,
- S: $aSb \Leftrightarrow a$ je zosobášený(-ná) s b.

Pomocou relácií D, S, operácií na reláciách a množinových operácií definujte relácie:

a) je rodičom,

b) je matkou,

c) je dedkom,

d) je súrodencom,

e) je bratom,

f) je svokrou,

g) je ujom,

h) je sesternicou,

i) je predkom,

j) je príbuzným.

Úloha 4. Nech D a E sú relácie medzi prvkami množín A a B. Dokážte, že $(D \cap E)^{-1} = D^{-1} \cap E^{-1}$.

Úloha 5. Nech D je relácia medzi prvkami množín A a B a nech E je relácia medzi prvkami množín B a C. Dokážte, že potom $(DE)^{-1} = E^{-1}D^{-1}$.

Úloha 6. Nech R, R_1, R_2 sú binárne relácie z A do B a S, S_1, S_2 binárne relácie z B do C. Rozhodnite, či vo všeobecnosti platia nasledonvé tvrdenia:

a) $R(S_1 \cap S_2) = RS_1 \cap RS_2$

b) $(R_1 \cap R_2)S = R_1S \cap R_2S$

c) $R(S_1 \cup S_2) = RS_1 \cup RS_2$

d) $(R_1 \cup R_2)S = R_1S \cup R_2S$

e) ak $S_1 \subseteq S_2$, tak potom $RS_1 \subseteq RS_2$

f) ak $R_1 \subseteq R_2$, tak potom $R_1S \subseteq R_2S$

g) $R(S_1 - S_2) = RS_1 - RS_2$

h) $(R_1 - R_2)S = R_1S - R_2S$

V prípade, že v niektorom prípade neplatí rovnosť, platí aspoň jedna inklúzia? Platia v c) a d) obrátené implikácie? (Riešenie úlohy si môžete pozrieť v skriptách Olejár, Škoviera na strane 70 (77 v pdf), Veta 4.3).

Úloha 7. Dokážte, že pre každú reláciu R na množine M platí:

a) R je reflexívna práve vtedy, keď $\mathrm{id}_M \subseteq R$

b) R je ireflexívna práve vtedy, keď $\mathrm{id}_M \cap R = \emptyset$

c) R je symetrická práve vtedy, keď $R^{-1} \subseteq R$

d) R je tranzitívna práve vtedy, keď $RR \subseteq R$

e) R je asymetrická práve vtedy, keď $R \cap R^{-1} = \emptyset$

f) R je antisymetrická práve vtedy, keď $R \cap R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_M$

Možno v podúlohách a), c), d) a f) nahradiť $\subseteq$ za $=$?

Úloha 8. Nech M je množina. Zapíšte množinu všetkých relácií na množine M.

Úloha 9. Uvažujme relácie | (delí) a $<$ (menší ako) definované na kladných celých číslach. Nájdite zložené relácie $<|$ a $|<$.

Úloha 10. (*) Uvažujme relácie | a $<$ na celých číslach ($a \mid b$ znamená, že a delí b). Vyjadrite relácie $|<$ a $<|$.