Toto je komentár k jednému riešeniu symetrie v úlohe 2b) z cvičení 1INF1, ktoré sme nemali čas dotiahnuť.

Úloha 2b) Je nasledovná relácia symetrická

$$S = \{(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ |r + s| = |3 + r - s|\}?$$

Máme zistiť, či pre každé $r, s \in \mathbb{Z}$ platí

$$rSs \Rightarrow sSr,$$

čo je ekvivalentné tomu, že

$$|r + s| = |3 + r - s| \Rightarrow |s + r| = |3 + s - r|.$$

Ľavé strany rovnosť sa rovnajú: $|r + s| = |s + r|$. Preto sa pozrieme, kedy sa rovnajú pravé strany, teda, kedy platí:

$$|3 + r - s| = |3 + s - r|.$$

i) $3 + r - s$ a $3 + s - r$ majú rovnaké znamienka:

$$\begin{aligned} |3 + r - s| &= |3 + s - r| \\ 3 + r - s &= 3 + s - r \\ 2r &= 2s \\ r &= s \end{aligned}$$

ii) $3 + r - s$ a $3 + s - r$ majú rôzne znamienka:

$$\begin{aligned} |3 + r - s| &= |3 + s - r| \\ 3 + r - s &= -3 - s + r \\ 3 &= -3 \ \rightarrow \ \text{nikdy neplatí} \end{aligned}$$

Teda $|3 + r - s| = |3 + s - r|$ len ak $r = s$. Čiže ak $r \neq s$, tak $|3 + r - s| \neq |3 + s - r|$. Tým pádom pre $r \neq s$ máme, že ak platí $|r + s| = |3 + r - s|$, tak $|s + r| \neq |3 + s - r|$. Teraz sa skúste zamyslieť, čo nám to vraví o symetrickosti relácie S.

Žiaľ, nehovorí nám to nič. Iba to, že týmto spôsobom sa nám nepodarilo dokázať, že S je symetrická relácia. Ak chceme ukázať, že S nie je symetrická, tak potrebujeme nájsť r, s, pre ktoré platí

$$|r + s| = |3 + r - s| \wedge |s + r| \neq |3 + s - r|.$$

No my sme len ukázali existenciu r a s takých, pre ktoré platí

$$|r + s| = |3 + r - s| \Rightarrow |s + r| \neq |3 + s - r|.$$

Ak máme na ľavej strane nepravdu, tak nám to nič nevraví (lebo z nepravdy vyplýva čokoľvek). Na dokončenie protipríkladu potrebujeme nájsť také r, s, pre ktoré platí $|r + s| = |3 + r - s|$ – potom nám dokázaná implikácia zaručí, že pre tieto r, s platí $|s + r| \neq |3 + s - r|$.

Preto pri vyvracaní vlastností je najistejšie uvádzať protipríklad. Správnym postupom by teda bolo na základe našich zistení nájsť protipríklad. Teda zvolili by sme si $r \neq s$ a zistili by sme, že stále nemáme protipríklad. Tak by sme si všimli, že je problém vôbec nájsť r, s, pre ktoré platí rSs a to by nás vedelo priviesť k tomu, že vlastne $S = \emptyset$.