

Cvičenie 7: Vlastnosti relácií, ekvivalencie, rozklady

Úloha 1. Aké relácie poznáte zo strednej školy? Pre každú z nich určte, či je reflexívna, ireflexívna, symetrická, tranzitívna.

Úloha 2. Rozhodnite, či relácia R je reflexívna, ireflexívna, symetrická, tranzitívna:

- a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x - y \in (-1, 1)\}$
- b) $S = \{(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; |r + s| = |3 + r - s|\}$
- c) $T = \{(r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; |r + s| = |3 + r - s|\}$
- d) Relácia U na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in U \Leftrightarrow 47 \in x \cap y$.
- e) $V = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; 5 \mid (a - b)\}$.

Úloha 3. Ktorá relácia z predošlej úlohy je reláciou ekvivalencie? Popíšte rozklad, ktorý indukuje.

Úloha 4. Dokážte, že pre každé kladné celé číslo d je relácia \equiv_d definovaná na \mathbb{Z} tak, že

$$a \equiv_d b \Leftrightarrow d \mid (a - b),$$

je reláciou ekvivalencie a popíšte rozklad, ktorý indukuje.

Poznámka. Táto relácia sa nazýva *kongruencia* a veľmi často sa využíva v teórii čísel. Dáva do vzťahu práve také čísla, ktoré majú rovnaký zvyšok po delení číslom d . Miesto značenia $a \equiv_d b$ sa skôr používa $a \equiv b \pmod{d}$ (čítame a je kongruentné s b modulo d). Teda napr. $2 \equiv 47 \pmod{5}$, $12 \equiv 0 \pmod{2}$, $22 \equiv 50 \pmod{7}$.

Úloha 5. Dokážte, že relácia

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x - y \in \mathbb{Z}\}$$

je reláciou ekvivalencie a popíšte rozklad, ktorý indukuje.

Úloha 6. Koľko je všetkých relácií ekvivalencie na štvorprvkovej množine? Koľko je ich na päťprvkovej množine?

Úloha 7. Dokážte, že ak R je tranzitívna relácia, tak aj R^{-1} je tranzitívna relácia.

Úloha 8. Nech R a S sú relácie ekvivalencie na množine M . Uvažujme nasledovné relácie

- a) $R \cup S$, b) $R \cap S$, c) $R - S$, d) RS , e) R^{-1} .

Pre každú z podúloh nájdite príklad relácií R, S kedy výsledná relácia je opäť reláciou ekvivalencie; a taktiež príklad relácií R, S , kedy výsledná relácia nie je reláciou ekvivalencie. V prípade, že také relácie R, S nemožno nájsť, dokážte prečo.

Úloha 9. Nech R a S sú tranzitívne relácie. Čo viete povedať o tranzitívnosti relácií

- a) $R \cap S$, b) $R \cup S$, c) $R - S$, d) RS , e) R^{-1} ?

Musia byť vždy tranzitívne? Môžu byť pre niektoré voľby R, S tranzitívne a inokedy nie? Nebudú nikdy tranzitívne?

Úloha 10. Rozhodnite, či relácia R je reflexívna, ireflexívna, symetrická, tranzitívna (do pozornosti dávame hlavne úlohy po i)):

- a) Relácia R na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ taká, že $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ac = bd$
- b) Relácia R na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ taká, že $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$
- c) $| = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; (\exists k \in \mathbb{Z})(b = k \cdot a)\}$

- d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \sin x = \sin y\}$
- e) $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; 7 \mid a + b\}$
- f) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in P \Leftrightarrow x \cap y = \mathbb{Z}$.
- g) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in P \Leftrightarrow x \cup y = \mathbb{Z}$.
- h) Relácia P na $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, taká že $(x, y) \in P \Leftrightarrow x \cap y = \emptyset$.
- i) Relácia P na $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$, taká že $(A, B) \in P \Leftrightarrow |A| = |B|$, kde $|M|$ označuje počet prvkov (konečnej) množiny M .
- j) $R = \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; c - d = 4\}$
- k) $R = \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; (cd + 100)(cd - 60) = 0\}$
- l) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; |x + y||x - y| \leq 3\}$
- m) $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; (|a + b| - 24)(|a - b| - 24) = 0\}$
- n) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x - y \in \langle 0, 1 \rangle\}$
- o) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x^2 = 2y^2\}$
- p) Relácia R na \mathbb{N} taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow x = 2^y$
- q) Relácia R na \mathbb{R} taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow x + y \leq 100$
- r) Relácia R na \mathbb{R} taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow |x| \leq |y|$.
- s) Relácia R na \mathbb{R} taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.
- t) Relácia R na \mathbb{N} taká, že $(x, y) \in R \Leftrightarrow 3 \mid x^2 + y^2$

Úloha 11. Ktoré z relácií z úlohy 10 sú reláciami ekvivalencie? Aký rozklad určujú?

Úloha 12. (*) Nech M je množina a \mathcal{R} je množina všetkých relácií na množine M . Je \mathcal{R} s operáciou \circ skladania relácií grupa? Je skladanie relácií komutatívne?

Úloha 13. Nech W je neprázdny systém relácií ekvivalencie na množine X . Dokážte, že aj $\bigcap_{R \in W} R$ je relácia ekvivalencie na množine X .