

# Cvičenie 12 a 13: Mohutnosti

**Úloha 1.** Nájdite bijekciu medzi množinami:

- a)  $(0, 1)$  a  $\langle 0, 1 \rangle$
- b) polkružnica bez krajných bodov a priamka
- c) štvorec a kruh
- d) polkružnica s krajnými bodmi a priamka

**Úloha 2.** Ktoré z množín  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  a  $\mathbb{R}$  sú spočítateľné?

**Úloha 3.** Je množina všetkých konečných postupností núl a jednotiek spočítateľná? Ak áno, nájdite bijekciu do  $\mathbb{N}$ .

**Úloha 4.** Je množina všetkých slov (teda konečných postupností) pozostávajúcich z malých písmen anglickej abecedy spočítateľná? Ak áno, nájdite bijekciu do  $\mathbb{N}$ .

**Úloha 5.** Rozhodnite, či nasledovné množiny sú spočítateľné. Je ich mohutnosť rovná mohutnosti  $\mathbb{N}$  alebo  $\mathbb{R}$ ?

- a) množina konečných podmnožín prirodzených čísel
- b)  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
- c) množina konečných postupností prirodzených čísel ( $\mathbb{N}^*$ )
- d) množina nekonečných postupností prirodzených čísel ( $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ )
- e) množina všetkých nekonečných nerastúcich postupností prirodzených čísel
- f) množina všetkých nekonečných neklesajúcich postupností prirodzených čísel
- g) množina algebraických čísel, teda takých čísel, ktoré sú koreňmi nejakého mnohočlena s celočíselnými koeficientmi (napr.  $4/17$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $i$ )
- h) množina všetkých injekcií  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- i) množina všetkých surjekcií  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- j) množina všetkých bijekcií  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- k) množina všetkých involúcií  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  (involúcia je také zobrazenie  $f$ , pre ktoré platí  $f \circ f = id$ ).
- l) ľubovoľná množina navzájom disjunktných otvorených intervalov
- m) ľubovoľná množina navzájom disjunktných gúľ v priestore

**Úloha 6.** Sú nasledovné množiny spočítateľné?

- a) množina všetkých programov C++
- b) množina všetkých problémov v informatike (v tejto úlohe si treba nejako rozumne definovať, čo je to problém)

**Úloha 7.** Vieme do počítača uložiť hocijaké reálne číslo? Predpokladajte, že počítať má ľubovoľne veľkú, avšak konečnú pamäť. (Např. za týchto predpokladov vieme uložiť ľubovoľné prirodzené číslo např. do premennej typu `string`. Premenné typov `int` či `double` však majú obmedzený rozsah a nevieme do nich ani ukladať iracionálne čísla.)

**Úloha 8.** Porovnajete mohutnosti nasledovných množín:

- a)  $\mathbb{C}$  a  $\mathbb{R}$

b)  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  (množina funkcií  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ )

c)  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  a  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  - toto sa mi pozdava na D. U.

d) množina všetkých rastúcich funkcií  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a množina všetkých klesajúcich funkcií  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

e) množina všetkých rastúcich funkcií  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

**Úloha 9.** Dokážte, že kardinálnych čísel je nekonečne veľa

**Úloha 10.** Dokážte, že množina je nekonečná vtedy a len vtedy, keď je ekvivalentná niektorej svojej vlastnej podmnožine.