

2. sada domácich úloh

Termín odovzdania 15. 12. 13:00

UPDATE: V úlohe 1b) bol opravený preklep: miesto $(a, b)S(c, d)$ tam pôvodne bolo aSb , čo nedávalo zmysel.

Úloha 1. (4 body) O každej z nasledujúcich relácií zistite a následne dokážte, či ide o reláciu ekvivalencie a či ide o usporiadanie:

- relácia R na \mathbb{Z} , kde $aRb \Leftrightarrow (a \mid b \wedge b \mid a)$;
- relácia S na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, kde $(a, b)S(c, d) \Leftrightarrow a + d \mid b + c$;
- relácia T na $\mathcal{P}(\mathbb{N}) - \{\emptyset\}$, kde $ATB \Leftrightarrow (A = B \vee (\forall a \in A)(\forall b \in B)(a \leq b))$.

V prípade, že ide o reláciu ekvivalencie, opíšte rozklad, ktorý indukuje. V prípade, že ide o usporiadanie, vypíšte všetky jeho minimálne, maximálne, najväčšie a najmenšie prvky.

Úloha 2. (1,5 boda) Nájdite bijekciu $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^3$. Nezabudnite dokázať, že ide o bijekciu. Pre vašu bijekciu f určte $f(10\,000)$. Spôsob výpočtu opíšte do vášho riešenia. V prípade, že si pomôžete programom, uveďte ho v riešení.

Úloha 3. (BONUS, 2 body) Nech $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ a nech \mathcal{F} je množina všetkých injektívnych zobrazení z množiny \mathbb{Z}_{42} do množiny \mathbb{Z}_{47} . Na množine \mathcal{F} definujeme reláciu R , kde fRg práve vtedy, keď

$$(\exists r \in \mathbb{Z}_{42})(\forall a \in \mathbb{Z}_{42})[f(a) = g((a + r) \bmod 42)].$$

Dokážte, že R je reláciou ekvivalencie. Opíšte rozklad množiny \mathcal{F} , ktorý indukuje. Koľko má tento rozklad tried?

Pravidlá a pokyny

- **Úlohy spisujte samostatne.** Môžete sa o nich rozprávať a môžete si poradiť. Avšak ich spísanie je už na vás. Vaše spísané riešenia si navzájom neukazujte.
- Úlohy odovzdajte do termínu odovzdania vášmu cvičiacemu
 - osobne na cvičeniach alebo
 - mailom s predmetom **UDDS DU2** ako jeden pdf súbor, v prípade fotenia riešení dbajte na dostatočný jas a kvalitu.
- Riešenie každej úlohy musí byť matematicky korektné a úplné vrátane dôkazov. Do riešenia zahrňte aj príslušné slovné komentáre, aby bolo jasné, čo v riešení robíte.
- Ak máte k úlohe akékoľvek otázky alebo potrebujete pomoc, kontaktujte vášho cvičaceho.