Cvičenie 2: Kvantifikátory

→ **Úloha 1.** Vyjadrite slovne nasledovné výroky a určte ich pravdivostnú hodnotu.

a) $(\exists x \in \mathbb{Z})(x > 5)$

b) $(\forall x \in \mathbb{Z})(x^2 > 0)$

c) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\sqrt{x} \in \mathbb{R}^+)$

d) $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 = -1)$

e) $(\exists x \in \mathbb{Z})(x = 5) \Rightarrow (\forall y \in \mathbb{Z})(y = 5)$

f) $(\exists x \in \mathbb{Z})(x = 5) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{Z})(x = 5)$

→ **Úloha 2.** Znegujte výroky z predošlej úlohy.

Úloha 3. Znegujte nasledovné výroky.

→ a) $(\exists n \in \mathbb{N})(42 < n < 47)$

→ b) $(\forall a \in \mathbb{N}^+)(\exists b \in \mathbb{N})(\forall c \in \mathbb{N})(c > b \Rightarrow c^a < 2^c)$

→ c) $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})[(a \notin \mathbb{Q} \wedge b > 0) \Rightarrow (\exists c \in \mathbb{Q})(|a - c| < b)]$

→ d) $(\forall a \in \mathbb{N})[(\exists b \in \mathbb{N})(a = b^2) \Rightarrow [(\forall c \in \mathbb{N})(a \neq 3c) \Rightarrow (\exists d \in \mathbb{N})(a + 2 = 3d)]]$

e) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})[(x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow (\exists c \in \mathbb{R})[c = x \cdot y \Rightarrow [(\forall z \in \mathbb{R})(z_1 > c \Rightarrow z_1 > 0)]]$

→ **Úloha 4.** Rozhodnite o pravdivosti nasledovných tvrdení. V tejto aj nasledujúcich úlohách chceme do vás aj zdôvodnenie vašej odpovede.

a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$,

b) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$,

c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$,

d) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$,

→ **Úloha 5.** Rozhodnite o pravdivosti nasledovných tvrdení:

a) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(xy = 0)$,

b) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(xy = 0)$,

c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(xy = 0)$,

d) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(xy = 0)$.

Úloha 6. Rozhodnite, ktoré výroky sú pravdivé.

a) $(\exists x \in \mathbb{R})\,(x \cdot 1 = x)$

b) $(\forall x \in \mathbb{R})\,(x \cdot 1 = x)$

c) $(\exists x \in \mathbb{R})\,(x \cdot x = 1)$

d) $(\forall x \in \mathbb{R})\,(x \cdot x = 1)$

e) $(\exists x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R})\,(x \cdot y = 1)$

f) $(\exists x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(x \cdot y = 1)$

g) $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R})\,(x \cdot y = 1)$

h) $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R})\,(x \cdot y = 1)$

Úloha 7. Rozhodnite, ktoré výroky sú pravdivé.

a) $(\exists n \in \mathbb{N})\,(\exists k \in \mathbb{N})\,(k > n)$

b) $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists k \in \mathbb{N})\,(k > n)$

c) $(\exists n \in \mathbb{N})\,(\forall k \in \mathbb{N})\,(k > n)$

d) $(\exists n \in \mathbb{N})\,(\exists k \in \mathbb{N})\,(k \mid n)$

e) $(\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists k \in \mathbb{N})\,(k \mid n)$

f) $(\exists n \in \mathbb{N})\,(\forall k \in \mathbb{N})\,(k \mid n)$

→ **Úloha 8.** Akú pravdivostnú hodnotu majú výroky $(\forall x \in M)a(x)$, $(\exists x \in M)a(x)$ ak M je a) prázdna b) jednoprvková množina?

Úloha 9. Pre každý z uvedených výrokov nájdite taký príklad množiny M a výrokových foriem $a(t)$ a $b(t)$ definovaných na množine M, aby po ich dosadení do výroku sme dostali pravdivý / nepravdivý výrok

→ a) $[(\exists x \in M)a(x) \wedge (\exists y \in M)b(y)) \Rightarrow (\forall z \in M)(a(z) \Rightarrow b(z)]$

b) $(\forall x \in M)\,[a(x) \Rightarrow (\exists y \in M)b(y)] \Rightarrow (\forall x \in M)(a(x) \Rightarrow b(x))$

c) $(\forall x)(a(x) \wedge b(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)a(x) \wedge (\forall x)b(x))$

d) $(\forall x)(a(x) \vee b(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)a(x) \vee (\forall x)b(x))$

e) $(\exists x)(a(x) \wedge b(x)) \Leftrightarrow ((\exists x)a(x) \wedge (\exists x)b(x))$

f) $(\exists x)(a(x) \vee b(x)) \Leftrightarrow ((\exists x)a(x) \vee (\exists x)b(x))$

Úloha 10. Zostavte výrokové formy, ktoré budú hovoriť nasledovné:

a) $e(a)$: a je párne číslo

b) $d \mid a$: číslo a je deliteľné číslom d.

c) $a \bmod d = z$: a dáva zvyšok z po delení číslom d

d) $p(x)$: x je prvočíslo

e) (*) d je najväčší spoločný deliteľ čísel a, b

Určte tiež doménu použitých premenných.

Úloha 11. Zapíšte matematickou formulou (bez ohľadu na pravdivosť výrokov):

→ a) Pripočítaním nuly sa žiadne reálne číslo nezmení.

→ b) Celé číslo d je deliteľom celého čísla a. (Túto výrokovú formu zapisujeme ako $d \mid a$, čo čítame tiež: „d delí a.“ V tejto podúlohe vyjadrite tento zápis pomocou matematických formúl. V ďalších podúlohách už môžete znak | bez problémov používať.)

→ c) Existuje párne číslo, ktoré je väčšie ako 7.

→ d) Každé celé číslo deliteľné desiatimi je deliteľné aj dvomi.

→ e) Žiadne celé číslo deliteľné tromi nie je párne.

→ f) Súčin dvoch nepárnych celých čísel je nepárne celé číslo.

g) Každé číslo deliteľné šiestimi je párne.

h) Súčet ľubovoľných troch za sebou idúcich celých čísel je deliteľný tromi.

→ i) Existuje najmenšie celé číslo.

→ j) Existuje práve jedno párne celé číslo. (V tomto kontexte sa v matematike bežne používa kvantifikátor $\exists!$ („exituje práve jeden“). Tu však chceme vyjadrenie bez tohto kvantifikátora.)

k) Ľubovoľne malé kladné reálne číslo vieme zdola aproximovať kladným racionálnym číslom.

l) Ľubovoľné reálne číslo vieme napísať ako súčet celého čísla a nezáporného reálneho čísla menšieho ako 1.

m) Medzi ľubovoľnými dvomi racionálnymi číslami je nejaké iracionálne.

n) (*) Prvočísel je nekonečne veľa.

o) (*) Pre každé celé čísla a, d ($d \neq 0$) vieme jednoznačne určiť zvyšok čísla a po delení číslom d.

Riešenia niektorých úloh a komentáre

Riešenie 4. úlohy

Riešenia úloh sú zoradené podľa ich náročnosti. Oproti úlohe 1 sú zdôvodnenia už stručnejšie

Riešenie

a) Neplatí, lebo pre $x = 1$, $y = 2$ neplatí $1 + 2 = 0$.

d) Platí, lebo pre $x = 3$, $y = -3$ platí $3 + (-3) = 0$.

c) Platí, lebo pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$ platí:pre $y = -x$ platí $x + (-x) = 0$.

b) Neplatí, lebo pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}$ zvolíme $y = 1 - x$ (čo je zjavne reálne číslo), pre ktoré máme $1 + (1 - x) = 1 \neq 0$, teda výrok $1 + (1 - x) = 0$ neplatí.

Uvedomme si, že v podúlohe b) sme vlastne dokazovali negáciu tvrdenia, ktorá vyzerá: $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y \neq 0)$. Preto sme použili takúto štruktúru – začali sme dokazovať všeobecný výrok „Pre ľubovoľné $x \in \mathbb{R}\ldots$“ a pre toto všeobecné x sme začali dokazovať existenčný výrok, čo sme začali voľbou y. Po prejdení kvantifikátorov sme dokazovali, že platí $x + y \neq 0$.

Výroky b) a c) ilustrujú, že na poradí kvantifikátorov záleží. To môžeme ilustrovať aj rôznymi slovnými významami výrokov b) a c):

b) Existuje reálne číslo, ktoré dáva súčet 0 s ľubovoľným reálnym číslom.

c) Každé reálne číslo dáva súčet 0 s nejakým reálnym číslom.

Tento vzťah si môžete lepšie ujasniť na nasledújúcej úlohe.

Riešenie 5. úlohy

a) Neplatí, lebo pre $x = 4$ a $y = 2$: $4 \cdot 2 \neq 0$.

b) Platí lebo pre $x = 0$ platí $(\forall y \in \mathbb{R})(0 \cdot y = 0)$

c) Platí, lebo pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí: pre $y = 0$ dostaneme $x \cdot 0 = 0$.

d) Platí, lebo pre $x = 0$ a $y = -17$ platí $0 \cdot (-17) = 0$.

Riešenie 11. úlohy

a) $(\forall x \in \mathbb{R})(x + 0 = x)$

b) $(\exists k \in \mathbb{Z})(a = kd)$

c) $(\exists a \in \mathbb{Z})(2 \mid a \wedge a > 7)$

d) $(\forall n \in Z)(10 \mid n \Rightarrow 2 \mid n)$

e) $(\forall n \in Z)(3 \mid n \Rightarrow 2 \mid n)$

f) $(\forall a, b \in \mathbb{Z})((2 \nmid a \wedge 2 \nmid b)$

i) $(\exists m \in \mathbb{Z})(\forall a \in \mathbb{Z})(m \leq a)$

j) $(\exists a \in \mathbb{Z})(2 \mid a) \wedge (\forall a, b \in \mathbb{Z})((2 \mid a \wedge 2 \mid b) \Rightarrow a = b)$